

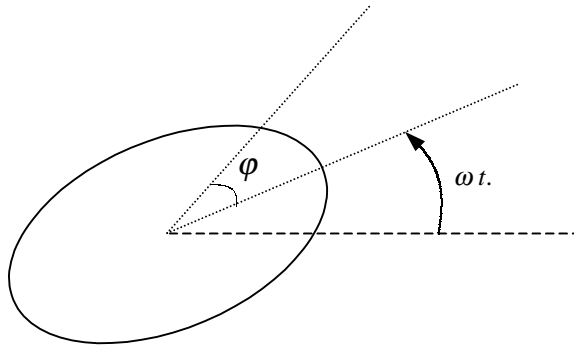
בחינה במכניקה אנליטית

חורף תשס"ב 2002 מועד א'
 מרצה: פרופ' יוסף אברון

- א. יש לענות על כל השאלות.
- ב. כל השאלות שוות בערך.
- ג. משך הבחינה שלוש שעות.
- ד. חומר עזר מותר: מחשבון, ספר אחד, מחברת הרצאות.

בהצלחה !

שאלה מס' 1



חלקיק שמסתו m נע (ללא חיכוך) על אליפסה שצירה הראשי הוא $2R$ והאקסצנטריות שלה e . נסמן ב- φ את הקואורדינטה המוכללת של החלקיק המתארת את מיקומו על האליפסה. היא הזווית של מיקום החלקיק ביחס לציר הראשי של האליפסה. האליפסה מסתובבת במישור הדיף במהירות זוויתית ω נגד כיוון השעון, כלומר בזמן t הזווית בין הציר הראשי של האליפסה לבין ציר x היא $\theta = \omega t$ והמיקום של החלקיק במישור הוא: $x = r(\theta) \cos(\theta)$, $y = r(\theta) \sin(\theta)$. נתונה משוואת האליפסה: $R = r(\varphi) (1 - e \cos \varphi)$.

- א. רשום את הלגרנג'יאן L של החלקיק בעזרת הקואורדינטה המוכללת φ והמהירות שלה. (7 נק')
 - ב. חשב את התנע הצמוד לקואורדינטה φ , שנשמנו ב- p_φ . (6 נק')
 - ג. עבור אילו ערכים של האקסצנטריות התנע p_φ נשמר? (6 נק')
 - ד. חשב את ההמילטוניאן של הבעיה, וכתוב אותו בקואורדינטות המתאימות. (6 נק')

שאלה מס' 2

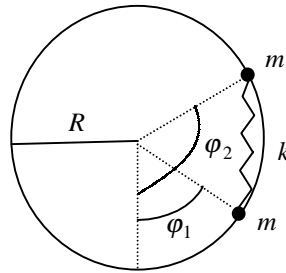
נתון המילטוניאן $D = \omega \bar{x} \cdot \bar{p}$ כאשר ω קבוע בעל ממדי תדירות.

- א. שרטט במישור x-p את הקווים שווי-אנרגיה. (5 נק')
- ב. כתוב את משוואות התנועה הקנוניות ופתור אותן. (5 נק')
- ג. חשב את סוגרי פואסון $\{D, \bar{x}\}, \{D, \bar{p}\}$ (5 נק')
- ד. חשב את סוגרי פואסון $\left\{D, \frac{1}{|\bar{x}|}\right\}, \{D, \bar{p}^2\}$ (5 נק')

ה. הראה כי ההמילטוניאן הזה אינו נגזר משום לגרנגיאן. הדרכה: חשב את הלגרנגיאן כטרנספורם לזינדר של ההמילטוניאן. (5 נק')

שאלה מס' 3

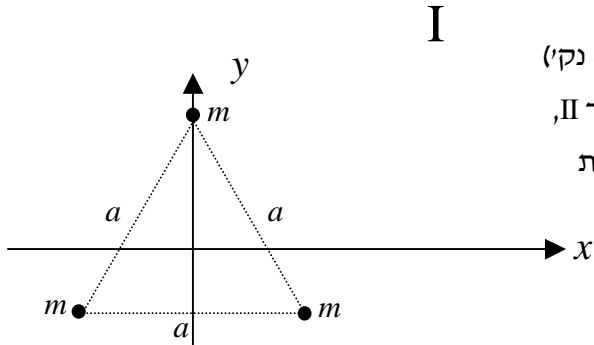
שתי מסות נקודתיות m יכולות לנוע על חישוק ברדיוס R. המסות מחוברות ביניהן ע"י קפיץ בעל קבוע k שאורכו במצב רפוי הוא ℓ_0 (כאשר $\ell_0 < 2R$). אין גרביטציה ואין חיכוך.



- א. כתוב את הלגרנגיאן של המערכת בעזרת הקואורדינטות המוכללות φ_1 ו- φ_2 (כמתואר בשרטוט), וקבל ממנו את משוואות אוילר-לגרנג' (הנח כי $\varphi_2 > \varphi_1$). (6 נק')
- ב. מהן נקודות שיווי המשקל היציבות והלא יציבות של המערכת? ניתן להשתמש במשוואות שקיבלת בסעיף הקודם (אין צורך להוכיח יציבות/אי-יציבות, מספיק לנמק משיקולים פיסיקליים). (6 נק')
- ג. נתון: $\ell_0 = \sqrt{2}R$. כתוב את הלגרנגיאן בקירוב של תנודות קטנות סביב נקודת שיווי המשקל היציבה. (6 נק')
- ד. חשב את התדירויות העצמיות ואופני התנודה הנורמליים של המערכת. הסבר איכותית את התוצאות. (7 נק')

שאלה מס' 4

המולקולה Na_3 היא משולש שווה צלעות, כשבכל קודקוד יש מסה m והמרחק בין זוגות אטומים a .
א. הראה כי מערכת הצירים המתוארת בציור I שראשיתה נמצאת במרכז המסה על המולקולה, כאשר ציר y הוא תיכון (גובה) לבסיס המשולש וציר z אנך למישור הדיף, היא מערכת צירים ראשית. (9 נק')



- ב.** חשב את טנזור האינרציה במערכת זו. (8 נק')
ג. חשב את טנזור האינרציה במערכת בציור II, המסובבת ב- 45° מעלות סביב ציר z יחסית למערכת בסעיף הקודם. (8 נק')

