

בחינה במכניקה אנליטית

חורף תשס"ב 2002 מועד ב'
 מרצה: פרופ' יוסף אברון

- א. בבחינה שלוש שאלות. יש לענות על כל השאלות.
- ב. משך הבחינה שלוש שעות.
- ג. חומר עזר מותר: מחשבון, ספר אחד, מחברת הרצאות.

בהצלחה !

שאלה מס' 1

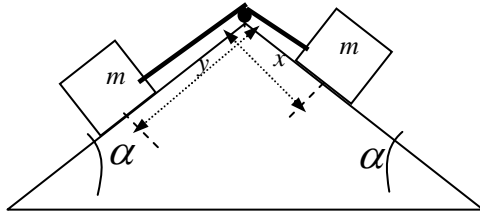
$$L = \frac{I_1}{2} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + K \cos \theta \quad \text{נתון לגרנזיאן}$$

כאשר (ψ, ϕ, θ) הן קואורדינטות מוכללות ו- $(\dot{\psi}, \dot{\phi}, \dot{\theta})$ מהירויות מוכללות. K קבוע.

- א. מצא את התנעים הצמודים P_ψ, P_ϕ, P_θ . (6 נק')
 - ב. מה הם כל קבועי התנועה בבעיה? (7 נק')
 - ג. רשום את משוואות אוילר-לגרנז'. (7 נק')
- ד. פתור את משוואות אוילר-לגרנז' במקרה הפרטי שבו $\dot{\psi}$ ו- $\dot{\phi}$ הם קבועים שאינם תלויים בזמן. מה ניתן ללמוד ממשוואות התנועה על θ בהנחה זו? (7 נק')
- ה. מצא קשר בין $\dot{\psi}$ ל- $\dot{\phi}$ במקרה של תנועה שבה $\dot{\psi}$ ו- $\dot{\phi}$ קבועים. (7 נק')

שאלה מס' 2

שתי מסות m מחוברות ע"י רצועת גומי אלסטית היוצרת כוח מחזיר כשל קפיץ בעל קבוע k ומונחות על משולש שווה שוקים כמתואר בציור. אין חיכוך במערכת. המערכת נמצאת בשדה גרביטציוני אחיד היוצר תאוצת כבידה g . אורך הרצועה במצב רפוי הינו l_0 .



- א. כתוב את הלגרנזיאן של המערכת בעזרת הקואורדינטות x, y (ראה סרטוט). השתמש בקודקוד זווית הראש של המשולש כנקודת הייחוס לחישוב האנרגיה הפוטנציאלית. (8 נק')
- ב. כתוב את משוואות אוילר-לגרנז' למערכת. מצא לפיהן את נקודות שיווי המשקל של המערכת וחקור את יציבותן. (9 נק')
- ג. הראה כי ניתן לכתוב לגרנזיאן למערכת בצורה $L = T - \frac{k}{2}(x + y - a)^2$ כאשר T היא האנרגיה הקינטית של המערכת. קבע את ערכו של הקבוע a בעזרת קבועי הבעיה (8 נק')
- ד. חשב את התדירויות העצמיות ואופני התנודה הנורמליים של המערכת לתנודות קטנות סביב נקודת שיווי המשקל. הסבר איכותית את התוצאות. (8 נק')

שאלה מס' 3

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \sqrt{p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + m^2} - \frac{e^2}{r}$$

כאשר p_r, p_θ הם התנעים הצמודים לקואורדינטות r, θ .

א. רשום את משוואות התנועה הקנוניות. (7 נק')

ב. מה הם כל קבועי התנועה בבעיה? (7 נק')

ג. הראה כי משוואת המסלול שקיבלת היא מהצורה $u'' + \alpha u = \beta$ כאשר $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$. קבע את α ו- β .

כפונקציה של הקבועים בבעיה. הדרכה: מתוך המשוואות מסעיף ב' קבל את הקשר $p_r = \frac{p_\theta}{r^2} r'$

(כאשר $r' \equiv \frac{dr}{d\theta}$), הצב אותו למשוואה $H = E$ (האנרגיה של המערכת) וחלץ ממנה את r'^2 .

קבל את משוואת המסלול תוך שימוש בהחלפת המשתנים $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$. (7 נק')

ד. פתור את משוואת המסלול כאשר $\alpha > 0$. (6 נק')

ה. עבור אילו ערכים של α המסלולים סגורים (כאשר $r(\theta)$ פונקציה חד-ערכית המוגדרת

בקטע $(0, 2\pi)$)? האם ערכים אלו מתקבלים בבעיה הנדונה? (6 נק')