<u>מבחן במכניקה אנליטית, מועד א' חורף 2006-2007</u>

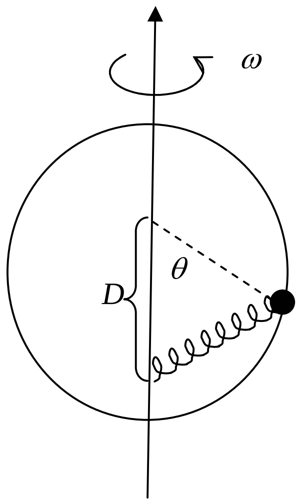
הוראות:

במבחן שלפניך 3 שאלות. ענה על כולן.
חומר עזר מותר לשימוש: 6 דפי A4, טבלאות אינטגרלים ומחשבון.
משך זמן: 3 שעות. שימו לב – הזמן קצר והבחינה ארוכה!!!
ניקוד:
שאלה ראשונה: 35 נקודות.
שאלה שנייה: 30 נקודות.
שאלה שלישית: 35 נקודות.

בהצלחה!

<u>שאלה ראשונה</u> (35 נקודות):

חרוז חופשי המושחל על מעגל בעל רדיוס R, החרוז מחובר בקפיץ בעל קבוע קפיץ k אל נקודה **<u>קבועה</u>** הנמצאת במרחק D ממרכז המעגל, על ציר הסיבוב. הלולאה מסתובבת במהירות ω סביב הציר הראשי (ראה ציור). (הנח/י כי $kD \neq mR\omega^2$ וכי אין גרוויטציה)



1. בחר/י את θ כקואורדינאטה מוכללת בבעיה וכתוב/כתבי לגרנג'יאן לבעיה, משוואות אוילר לגרנג', וקבועי תנועה. (8 נקודות)

2. מצא/י את נקודות שיווי המשקל ואפיין/י אותן (יציבות/נייטרליות/לא-יציבות). (10 נקודות)

3. עבור $kD > mR\omega^2$ בצע/י קרוב לתנודות קטנות ומצא/י את התדרים האופייניים ליד נק' שיווי המשקל היציבה. (8 נקודות)

4. כעת מוסיפים גרוויטציה לבעיה. מהו התנאי עבורו $\theta = 0$ היא נקודת שיווי משקל יציבה? (9 נקודות)

<u>שאלה שנייה (30 נקודות):</u>

נתון לגרנג׳יאן המבטא אנרגיה קינטית $T(\mathrm{v})=-M\sqrt{c^2-\mathrm{v}^2}$ כאשר $\mathrm{v}=|\vec{\mathrm{v}}|$ הוא הערך המוחלט של המהירות, M פרמטר בעל ממדים מתאימים (לא בהכרח ממדי מאסה) ו c מהירות האור (קבוע).

1. הראה שעבור מהירויות קטנות יחסית למהירות האור $T(\mathrm{v})$ נבדל מהאנרגיה הקינטית של חלקיק חופשי לא יחסותי בקבוע. חשב את הקבוע ואת המאסה של החלקיק הלא יחסותי (5 נקודות).

2. חשב את טרנספורם לג׳ינדר של $T(\mathrm{v})$ וסמן אותו ב $T_L(p)$. מה המובן במכאניקה שלו (5 נקודות).

3. בסעיפים הבאים החלקיק נע בשדה פוטנציאל רדיאלי $V=\frac{k}{r}$. האם האנרגיה היא $T(\mathrm{v})+V(r)$ או $T_L(p)+V(r)$, נמק (3 נקודות).

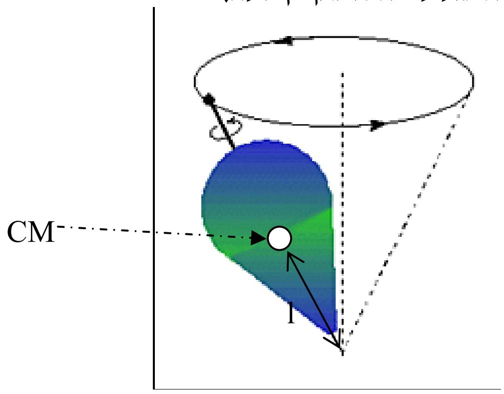
4. כאשר החלקיק נע במהירויות קטנות מאד ידוע שהווקטור $\vec{e}=\hat{x}-\frac{1}{km}\vec{L}\times\vec{p}$ הוא שמור תנועה כאשר m מסת החלקיק. חשב את e^2 (באותם תנאים של מהירויות קטנות) והראה כי הוא נקבע על ידי האנרגיה E והתנע הזוויתי L (8 נקודות).

5. כאשר החלקיק עם האנרגיה הקינטית $T(\mathrm{v})$ נע במהירות קטנה התנועה שהוא מבצע היא בקירוב תנועה קפלרית, המסלולים הם בקירוב טוב אליפסות והתיקונים באים לידי ביטוי רק אחרי מספר רב של סיבובים. ניתן במקרה זה לחשוב על המסלולים האמיתיים כאליפסות שהפרמטרים שלהן משתנים לאט בזמן . הסבר אילו מהשינויים שלהלן מותרים ואילו אסורים, נמק
   I. הציר האנך למישור האליפסה יבצע פרצסיה איטית במרחב (3 נקודות)
   II. הציר הראשי של האליפסה יסתובב במישור האליפסה (3 נקודות)
   III. האליפסה תשנה את האקסצנטריות שלה לאט ולאחר מספיק זמן האקסצנטריות של האליפסה תשתנה באופן משמעותי. (3 נקודות)

<u>שאלה שלישית</u> (35 נקודות):

הלגרנג'יאן של סביבון סימטרי $(I_1 = I_2 \neq I_3)$ העומד על שולחן (מרחק מרכז הכובד מהנקודה הנוגעת בשולחן ניתן ע"י l – ראה שרטוט) הוא:

$L = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 - mgl\cos\theta$ כש (θ,φ,ψ) הן זוויות אוילר. (נקודת המגע עם השולחן קבועה).



1. רשום את התנעים המוכללים $P_\theta, P_\varphi, P_\psi$ והאנרגיה E בבעיה זאת (5 נקודות).
2. מי מהגדלים בסעיף 1 שמור? (5 נקודות)
3. הראה שניתן לרשום את האנרגיה בעזרת שמורי התנועה האחרים כ $E = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta)$ ומצא את $U_{eff}(\theta)$. (5 נקודות)
4. הראה שעבור תנודות קטנות $P_\varphi = P_\psi$. (5 נקודות)
5. רשום את $U_{eff}(\theta)$ עבור θ קטנות (פתח רק עד הסדר הרלוונטי!).(5 נקודות)
6. מצא תנאי על התנעים המוכללים השמורים כך שהנקודה θ=0 תהיה שיווי משקל יציב, ומצא את התדירות העצמית (10 נקודות).

פתרונות :

שאלה 1 :

1. הלגרנג'יאן :

$$L = T - U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta - \frac{1}{2}k\left(R^2 + D^2 - 2RD\cos\theta\right)$$

נוריד קבועים :

$$L = T - U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta + kRD\cos\theta$$

EL

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial\theta}$$

$$mR^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin\left(2\theta\right) - \frac{1}{2}k2RD\sin\theta$$

קבועי תנועה

אנרגיה :

$$E = \dot{\theta}\left(mR^2\dot{\theta}\right) - \left(\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}k2RD\cos\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta - \frac{1}{2}k2RD\cos\theta = const$$

2. נקודות שיווי המשקל יקיימו :

$$\frac{\partial U_{eff}}{\partial\theta} = \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin\left(2\theta\right) - \frac{1}{2}k2RD\sin\theta = R\sin\theta\left(mR\omega^2\cos\theta - kD\right) = 0$$

$$\theta = 0, \pi$$

וכאשר $kD < mR\omega^2$, נקבל שתי נקודות נוספות :

$$\theta = \pm\cos^{-1}\left[\frac{kD}{mR\omega^2}\right]$$

יציבות :

ליד $\theta = 0$:

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\theta^2 - kRD\frac{1}{2}\theta^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\theta^2 R\left(kD - mR\omega^2\right)$$

זוהי נקודה יציבה אם $kD > mR\omega^2$ זוהי נקודה לא יציבה אם $kD < mR\omega^2$.

ליד $\theta = \pi$:

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\theta^2 + kRD\frac{1}{2}\theta^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\theta^2 R\left(-kD - mR\omega^2\right)$$

תמיד לא יציבה!!

במקרה של $kD < mR\omega^2$ יש עוד 2 נקודות : $\theta = \pm\cos^{-1}\left[\frac{kD}{mR\omega^2}\right]$, אבל נזכור כי כבר ראינו שיש לנו 2 נקודות בלתי יציבות בתחום ולכן 2 הנקודות הנותרות הן יציבות.

3. נקודת שיווי משקל יחידה $\theta = 0$

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\theta^2 R\left(kD - mR\omega^2\right) \text{ ולכן } \Omega^2 = \frac{kD - mR\omega^2}{mR}$$

4. נוסף ללגרנזי׳אן האיבר $-mgR\cos\theta$, ולכן השינוי יהיה: $\left(kD - mg\right) > mR\omega^2$.

<u>שאלה 2:</u>

1. $T = -Mc + \frac{1}{2c}\mathrm{Mv}^2 + \ldots$ האבר הראשון הוא הקבוע והמאסה היא $\frac{M}{c}$.
2. חישוב נותן $T_L = c\sqrt{p^2 + M^2} \geq 0$ מובנו אנרגיה קינטית או המילטוניאן
3. האנרגיה היא $T_L + V$ מהגדרה ומחוקי שימור
4. נסמן $\alpha = -\frac{1}{km}$ ונקבל:

$$e^2 = \left(\hat{x} + \alpha L \times p\right)^2 = 1 + \alpha^2 L^2 p^2 + 2\alpha L \times p \cdot \hat{x} = 1 + \alpha^2 L^2 p^2 - 2\frac{\alpha L^2}{r}$$

$$= 1 + 2\alpha L^2\left(\frac{\alpha p^2}{2} - \frac{1}{r}\right) = 1 - \frac{2\alpha L^2}{k}\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{k}{r}\right) = 1 - 2\frac{L^2 E}{mk^2}$$

5.

I האנך לא יכול לעשות פרצסיה כיון שהתנועה מישורית

II אפשרי וקורה

III לא אפשרי כיון שאז האנרגיה תסטה באופן משמעותי בניגוד לסעיף הקודם שקושר את האקסצנטריות עם גדלים נשמרים

<u>שאלה 3:</u>

1+2. התנעים המוכללים:

$$p_\theta = I_1\dot{\theta}$$
$$p_\varphi = \dot{\varphi}\left(I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right) + I_3\dot{\psi}\cos\theta$$
$$p_\psi = I_3\dot{\psi} + I_3\dot{\varphi}\cos\theta$$

היות והקורדינטות φ ו ψ הן ציקליות, התנעים p_ψ, p_φ שמורים. θ מופיע בלגרנג׳יאן ולכן התנע p_θ אינו שמור.

גם האנרגיה במקרה זה שמורה (הלגרנג׳יאן לא תלוי בזמן):

$$E = I_1\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\left(I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right) + I_3\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta + I_3\dot{\psi}^2$$

$$+ I_3\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta - \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) - \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 + mgl\cos\theta$$

3. נמצא את $\dot{\varphi},\dot{\psi}$ כתלות בתנעים השמורים:

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \cos\theta \frac{p_\varphi - p_\psi \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}$$

. נציב זאת באנרגיה

ונקבל $E = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\left(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\right)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2} + mgl\cos\theta$. זאת אנרגיה התלויה רק ב-θ, ולכן שקולה לבעיה חד מימדית עם פוטנציאל אפקטיבי $U_{eff}(\theta) = \frac{\left(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\right)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2} + mgl\cos\theta$.

4. עבור זוויות קטנות:

$$p_\varphi = \dot{\varphi} I_3 + I_3 \dot{\psi}$$

$$p_\psi = I_3 \dot{\psi} + I_3 \dot{\varphi}$$

ולכן שווים.

5. נפתח פוטנציאל זה עבור זוויות θ קטנות:

$$U_{eff}(\theta) = \frac{\left(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\right)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2} + mgl\cos\theta \approx C + \frac{p_\psi p_\varphi \theta^4}{2I_1 \theta^2} - \frac{mgl\theta^2}{2} + O(\theta^3)$$

$$= C + \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{p_\psi p_\varphi}{I_1} - mgl\right) + O(\theta^3)$$

6. אם הפוטנציאל הוא בעל מינימום ב θ=0 אז שיווי המשקל יהיה יציב, ואם מקסימום – הסביבון ייפול (שיווי משקל לא יציב). לכן שיווי המשקל יציב אם מתקיים $\frac{p_\psi p_\varphi}{I_1} > mgl$. נציב את התנעים בקירוב θ קטנה ונקבל:

$$p_\varphi = \dot{\varphi} I_3 + I_3 \dot{\psi}$$

$$p_\psi = I_3 \dot{\psi} + I_3 \dot{\varphi}$$

היות ובמקרה זה $\dot{\varphi} + \dot{\psi} = \omega_3$ נקבל שהתנאי לשיווי משקל יציב הוא $\frac{I_3^2 \omega_3^2}{I_1} > mgl$. אם הסביבון מאט (בגלל חיכוך), כשירד מתחת $\omega_3^2 < \frac{mglI_1}{I_3^2}$, θ=0 כבר לא תהיה הנקודה היציבה.

ע״פ האנרגיה, התדירות סביב שיווי משקל ניתנת ע״י $\omega = \sqrt{\frac{\frac{p_\psi p_\varphi}{I_1} - mgl}{I_1}} = \sqrt{\frac{p_\psi p_\varphi}{I_1^2} - \frac{mgl}{I_1}}$.