

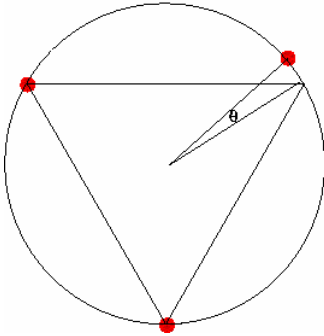
בחן מועד אלף מכאניקה אנליטית אביב 2005

יש לענות על כל השאלות
 חומר עזר מותר: רשימות אישיות, מחשבון וטבלאות אינטגרלים



שאלה 1 (תנודות קטנות)

שלוש מאסות זהות m מחוברות בקפיצים זהים (על הקשתות) עם קבוע קפיץ k ומאולצות לנוע על מעגל אופקי ברדיוס R . בוחרים את הזוויות θ_j המודדות סטייה ממצב שווי משקל של משולש שווה צלעות כקואורדינאטות מוכללות (ראה ציור).



1. רושמים את הלגרנגיאן של תנודות קטנות בצורה

$$L = \frac{1}{2} \sum M_{ij} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j - \frac{1}{2} \sum K_{ij} \theta_i \theta_j$$
 קבע את המטריצות M, K .
2. האם תדירות התנודות העצמיות תלויות ב R , הסבר.
3. חשב את המטריצה הסקולרית של תנודות קטנות.
4. הסבר מדוע אם (a, b, c) הוא אופן תנודה עצמי אזי גם (b, c, a) וגם (c, a, b) הם אופני תנודה עצמיים עם אותו ערך עצמי
5. האם $(1, 1, 1)$ הוא אופן תנודה עצמי? אם כן, מה התדירות העצמית? ומה הפירוש של התוצאה.
6. האם $(2, -1, -1)$ הוא אופן תנודה עצמי? אם כן, מה התדירות העצמית?
7. כיצד מתייחסת התוצאה שקבלת בסעיף 6 לזו שקבלת בסעיף 4 ומה ניתן ללמוד מכך?

שאלה 2 (סוגרי פואסון)

1. חשב את סוגרי פואסון $\{\cos \phi, l_z\}$ כאשר ϕ היא הקואורדינאטה האזימוטלית במישור, $\cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ו l_z התנע הזוויתי, $l_z = xp_y - yp_x$.
2. מצא את סוגרי פואסון של $\{l_z, \phi\}$
3. האם הקואורדינאטה האזימוטלית והתנע הזוויתי הם זוג קנוני? (כלומר, האם יש טרנספורמציה קנונית של מרחב הפאזה שנותנת את הזוג הנ"ל) נמק.
4. האם שני רכיבי התנע הזוויתי l_x, l_y הם זוג קנוני? נמק.
5. מצא את כל הזוגות הקנונים של תנע וקואורדינטה בין $\phi, l_x, l_y, l_z, \theta$ כאשר l_j הם שלושת רכיבי התנע הזוויתי הקרטזים ו θ, ϕ הן הקואורדינטות הרגילות על הכדור (θ קובעת את קו הרוחב ϕ קובעת את קו האורך, או השעה בשעון).

שאלה 3 (טנסור אינרציה)

- תחנת חלל בצורת טבעת הומוגנית מישורית דקה בעלת רדיוס $R = 24 [m]$ ומאסה $M = 36 [ton]$. נבחר כציר z את הכוון המתלכד עם ציר הטבעת.
1. חשב את טנסור האינרציה של התחנה.
 2. נתון כי המהירות הזוויתית ברגע $t = 0$ היא $\vec{\omega} = \pi(3\hat{x} + 2\hat{z})$ ביחידות של $(day)^{-1}$.
 3. חשב את התנע הזוויתי (באותיות) ואת האנרגיה (במספרים, ביחידות MKS) של התחנה.
 4. חשב את הזמן בו ציר z של התחנה ישוב להצביע לאותו כוון במרחב איליו הצביע בזמן $t = 0$

בהצלחה

פתרון מועד אלף

1 תנודות קטנות

$$L = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 - \omega_0^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - \omega_0^2(\theta_3 - \theta_2)^2 - \omega_0^2(\theta_1 - \theta_3)^2), \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad .1$$

$$M = \frac{mR^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = \frac{kR^2}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

2. כיוון שהלגרנגיאן תלוי ב R כגורם כפלי משוואת התנועה אינן תלויות בו

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 \end{pmatrix} \quad .3$$

4. ברור מסמטריה

5. כן, 0. תדירות עצמית מתאפסת עבור סיבוב קשיח של שלושת המאסות ללא עוות של

הקפיצים.

6. כן. וקטור עצמי מאונך

$$(2, -1, -1) \rightarrow \omega^2 = \omega_0^2(2 - x - \bar{x}) = 2\omega_0^2(1 - \cos 2\pi/3) = 3\omega_0^2$$

7. הסתירה מתיישבת אם שתי תדירויות מנוונות

2

2 סוגרי פואסון

$$\{\cos \theta, \ell\} = \frac{\partial \cos \theta}{\partial p_x} \frac{\partial \ell}{\partial x} + \frac{\partial \cos \theta}{\partial p_y} \frac{\partial \ell}{\partial y} - \frac{\partial \cos \theta}{\partial x} \frac{\partial \ell}{\partial p_x} - \frac{\partial \cos \theta}{\partial y} \frac{\partial \ell}{\partial p_y} \quad .1$$

$$= y \frac{\partial \cos \theta}{\partial x} - x \frac{\partial \cos \theta}{\partial y} = y \frac{y^2}{r^3} + x \frac{xy}{r^3} = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

2. מהחישוב נובע $\{\cos \theta, \ell\} = -\sin \theta \{\theta, \ell\}$ ולכן $\{\ell, \theta\} = 1$

3. כן, מסוגרי פואסון.

4. לא כיוון שסוגרי פואסון $\{\ell_x, \ell_y\} = \ell_z$ אינם אפס ואינם אחד.

3 טנסור אינרציה

1. מסימטריה ברורה מערכת הצירים הראשית. מומנט האינרציה סביב ציר z הוא

$$J = \frac{MR^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad MR^2 \text{ כיוון שהגוף מישורי שני הרכיבים האחרים הם חצי. ולכן}$$

$$2. \vec{M} = \frac{\pi MR^2}{2} (3\hat{x} + 4\hat{z}) \text{ והאנרגיה היא}$$

$$E = \frac{\pi^2}{2} \frac{MR^2}{2} (9 + 16) = 25\pi^2 \frac{MR^2}{4} \approx 310 \text{ [joule]}$$

$$\Omega_p = \frac{|M|}{I_1} = 5\pi \quad \text{נדירות הפרציה היא} \quad .3$$

$$T = \frac{2\pi}{|\Omega_p|} = \frac{2}{5} \quad [day] \quad .4$$