בחן מועד בית מכאניקה אנליטית אביב 2005

- יש לענות על כל השאלות
- חומר עזר מותר: רשימות אישיות, מחשבון וטבלאות אינטגרלים

שאלה 1 (תנודות קטנות, קפלר)

נתונה הלגרנגיאן לבעיית קפלר בצורה $L=\frac{m}{2}\vec{v}^2+\frac{k}{r}, \quad k>0$. נתון התנע הזוויתי ℓ.

1. רשום את המילטוניאן ואת משוואות התנועה הקנוניות עבור התנועה הרדיאלית.
2. מצא את הרדיוס r_0 המתאים לנקודת שיווי המשקל לתנועה הרדיאלית. איזה סוג מסלול קפלרי מתארת נקודה זו?
3. רשום את ההמילטוניאן לתנודות קטנות סביב נקודת שיווי המשקל
4. חשב את התדירות ω של תנודות קטנות סביב נקודת שיווי המשקל באמצעות k, r_0.
5. מה היחס בין התדירות של התנודות הקטנות לתדירות המסלול הקפלרי הרדיאלי באותו רדיוס?

שאלה 2 (טרנספורמציות קנוניות)

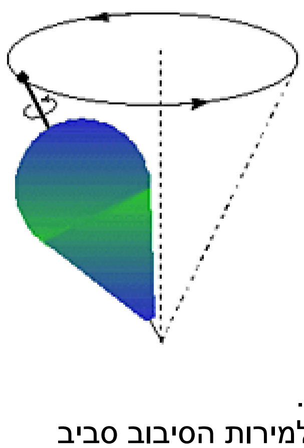
1. מצא פונקציה יוצרת $F(q,P)$ עבור טרנספורמציה קנונית של מרחב פאזה $2n$ ממדי הנותנת את Q כטרנספורמציה ליניארית של q ואת p כטרנספורמציה ליניארית של P.
2. נתון כי $Q_j=\sum A_{jk}q_k, \quad P_j=\sum B_{jk}p_k$. מה התנאי על שתי המטריצות A, B כדי שהטרנספורמציה אכן תהיה קנונית. הנח כי A, B הן מטריצות $n\times n$ הפיכות.
3. נתון כי A היא טרנספורמציה אורתוגונאלית (סיבוב) במרחב הקואורדינאטות. מה נתן להגיד על B במקרה זה.

שאלה 3 (סביבונים)

סביבון סימטרי מסתובב על שולחן חלק (ללא חיכוך) כאשר נקודת המגע בין הסביבון לשולחן היא חוד דק ראה ציור. מאסת הסביבון היא m ומרכז הכובד שלו הוא במרחק ℓ מהחוד, נקודת המגע עם השולחן. האנרגיה הקנטית של סביבון סימטרי נתונה בנוסחה

$$E_k=\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2$$

הזוויות בנוסחה הן זוויות אוילר.



1. רשום את הלגרנגיאן של הסביבון כאשר הוא נע בנוכחות תאוצת הכובד g
2. מצא את התנעים הצמודים לזוויות אוילר $\pi_\theta, \pi_\phi, \pi_\psi,$
3. מצא את קבועי התנועה בבעיה.
4. מצא את התנאי לפתרון משוואות התנועה שעבורו θ קבועה.
5. סביבון נקרא מהיר אם מהירות הפרצסיה שלו קטנה יחסית למירות הסיבוב סביב הציר, $\dot{\psi}\gg\dot{\phi}$. בהנחה זו, מצא את מהירות הפרצסיה אם נתונה $\dot{\psi}$

בהצלחה

פתרון מועד בית

פתרון 1 תנודות קטנות

1. $H_r = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$
2. $0 = \frac{\ell^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} \Rightarrow r_0 = \frac{\ell^2}{km}$ מסלולו מעגלי
3. $H_{so} = \frac{p_r^2}{2m} + \left(\frac{\ell^2}{2mr_0^2} - \frac{k}{r_0}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3\ell^2}{mr_0^4} - \frac{2k}{r_0^3}\right)(r-r_0)^2 = \frac{p_r^2}{2m} - \left(\frac{k}{2r_0}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{r_0^3}\right)(r-r_0)^2$
4. $w^2 = \frac{k}{mr_0^3}$
5. זו אותה תדירות של המסלול הקפלרי.

פתרון 2 טרנספורמציות קנוניות:

נכתוב בכתיב וקטורי $Q = Aq, \quad P = Bp$.

ננסה פונקציה יוצרת ריבועית $F(q,P) = q\cdot(CP) = (C^t q)\cdot P = \sum q_j C_{jk} P_k$ אזי מתכונות

הפונקציה היוצרת $Q = \frac{\partial F}{\partial P} = C^t q$, $p = \frac{\partial F}{\partial q} = CP$. מכאן נובע $C^t = A$ ו $C^t = A$ $C = B^{-1}$

ולכן $(B^t)^{-1} = A$. עבור טרנספורמציה אורתוגונאלית $B = A$.

פתרון 3 (סביבונים)

1. $L = \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2 - mg\ell\cos\theta$
2. $\pi_\theta = I_1\dot\theta, \quad \pi_\phi = (I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot\phi + I_3\dot\psi\cos\theta, \quad \pi_\psi = I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)$
3. כיוון שהלגרנגואן אינו תלוי בשתי הזוויות ψ,ϕ התנעים הצמודים הם קבועי תנועה.
4. אם $\frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \dot\pi_\theta = 0$ זה נותן משוואה

   $0 = I_1\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta - I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)\dot\phi\sin\theta + mg\ell\sin\theta$ ופישוט נותן

   $0 = (I_1 - I_3)\dot\phi^2\cos\theta - I_3\dot\psi\dot\phi + mg\ell$
5. $\dot\phi = \frac{mg\ell}{I_3\dot\psi}$