

בחן מגן מכניקה אנליטית אביב 2005

- יש לענות על שתי השאלות
- חומר עזר מותר: רשימות אישיות, מחשבון וטבלאות אינטגרלים

שאלה 1

- חלקיק שמסתו m נמצא בבור פוטנציאל חד-ממדי שצורתו $V(x) = mg|x|$.
1. נתונים תנאי התחלה של מקום ומהירות. האם בתנאים אלה תנועת החלקיק תלויה במסה שלו או לא. נמק.
 2. האם האנרגיה של החלקיק נשמרת?
 3. האם התנע של החלקיק נשמר במהלך התנועה?
 4. חשב את זמן המחזור כפונקציה של האמפליטודה של ההעתק המכסימלי A .

שאלה 2

מסה m נעה על כדור חלק וחסר חיכוך בעל רדיוס R המסתובב סביב ציר Z במהירות זוויתית קבועה Ω . בוחרים את הקואורדינטות המוכללות כזוויות הכדוריות (ϑ, φ) כאשר ϑ היא הזווית עם ציר הסיבוב במערכת צירים הצמודה לכדור. בזמן $t = 0$ ציר X במערכת צירים קבועה מתלכד עם הכוון $\varphi = 0$.

1. רשום את הקואורדינטות של החלקיק (x, y, z) במערכת צירים קרטזית שאינה מסתובבת באמצעות הקואורדינטות המוכללות (ϑ, φ) .
2. חשב את שלושת המהירויות $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ובטא אותן באמצעות הקואורדינטות המוכללות (ϑ, φ) .
3. רשום את האנרגיה הקינטית K_I כפי שהיא נראית במערכת אינרציאלית באמצעות (ϑ, φ) .
4. רשום את האנרגיה הקינטית K_R כפי שהיא נראית במערכת המסתובבת באמצעות (ϑ, φ) .
5. קבע את הלגרנגיאן של החלקיק L בקואורדינטות המוכללות (ϑ, φ) .
6. מצא את התנע p_ϑ . האם הוא קבוע תנועה, נמק.
7. מצא את התנע p_φ . האם הוא קבוע תנועה, נמק.
8. מצא את הקשר בין התנעים בסעיפים הקודמים לתנע הזוויתי סביב ציר הסיבוב M .
9. חשב את קבוע התנועה E (אם יש כזה) השייך לסימטריה של הזזות בזמן של הלגרנגיאן בקואורדינטות המוכללות (ϑ, φ) .
10. האם האנרגיה הקינטית K_I במערכת אינרציאלית היא קבוע תנועה? אם כן, מצא קשר בינה לבין M ו- E .
11. האם האנרגיה הקינטית K_R במערכת המסתובבת היא קבוע תנועה? אם כן, מצא קשר בינה לבין M ו- E .

בהצלחה

שאלה 1

1. לא כי המאסה גורם של פרופורציה בלגרנגיאן
2. כן כי הלגרנגיאן לא תלוי מפורשות בזמן
3. לא כי הלגרנגיאן תלוי בקואורדינטה
4. $T = 2\sqrt{2A/g}$

שאלה 2

$$x = R \sin \vartheta \cos(\varphi + \Omega t), y = R \sin \vartheta \sin(\varphi + \Omega t), z = R \cos \vartheta \quad .1$$

$$\dot{x} = R(\dot{\vartheta} \cos \theta \cos(\varphi + \Omega t) - (\dot{\varphi} + \Omega) \sin \theta \sin(\varphi + \Omega t)),$$

$$\dot{y} = R(\dot{\vartheta} \cos \theta \sin(\varphi + \Omega t) + (\dot{\varphi} + \Omega) \sin \theta \cos(\varphi + \Omega t)), \quad .2$$

$$\dot{z} = -R\dot{\vartheta} \sin \theta$$

$$K_I = \frac{mR^2}{2}(\dot{\vartheta}^2 + (\dot{\varphi} + \Omega)^2 \sin^2 \vartheta) \quad .3$$

$$K_R = \frac{mR^2}{2}(\dot{\vartheta}^2 + (\dot{\varphi})^2 \sin^2 \vartheta) \quad .4$$

$$L = K_I \quad .5$$

$$\text{לא } p_\vartheta = mR^2 \dot{\vartheta} \quad .6$$

$$\text{כן } p_\varphi = mR^2(\dot{\varphi} + \Omega) \sin^2 \vartheta \quad .7$$

$$M = p_\varphi \quad .8$$

$$E = p_\vartheta \dot{\vartheta} + p_\varphi \dot{\varphi} - L = \frac{mR^2}{2}(\dot{\vartheta}^2 + (\dot{\varphi} + \Omega)^2 \sin^2 \vartheta - 2\Omega(\dot{\varphi} + \Omega) \sin^2 \vartheta) \quad .9$$

$$E = K_I - \Omega M : \text{כן} \quad .10$$

11. לא : האנרגיה הקינטית במערכת המסתובבת קשורה עם שמור התנועה בסעיף

$$9 \text{ בקשר } E_R = E + \frac{mR^2}{2}(\Omega^2 \sin^2 \vartheta) \text{ וכיון שהזווית } \vartheta \text{ אינה קבוע תנועה}$$

נובע שהאנרגיה הקינטית במערכת המסתובבת גם היא אינה קבוע תנועה.

Filename: midterm2005.doc
Directory: C:\Documents and Settings\Administrator\My Documents\classical-mech\exam
Template: C:\Documents and Settings\Administrator\Application Data\Microsoft\Templates\Normal.dot
Title: בהן מגן מכניקה אנליטית סתיו 2002
Subject:
Author: Avron
Keywords:
Comments:
Creation Date: 7:51 13/04/2005 לפנה"צ
Change Number: 8
Last Saved On: 8:43 22/04/2005 לפנה"צ
Last Saved By: Joseph Avron
Total Editing Time: 128 Minutes
Last Printed On: 8:43 22/04/2005 לפנה"צ
As of Last Complete Printing
Number of Pages: 2
Number of Words: 498 (approx.)
Number of Characters: 2,130 (approx.)