תאריך:14 פברואר 2005

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

הפקולטה לפיזיקה

מבחן באינפורמציה קוונטית–116031 מועד א חורף תשסה

הוראות לנבחן:

1. במבחן שלוש שאלות שמשקלן זהה.
2. חומר עזר: מחשבון, רשימות אישיות וצילומים.

בהצלחה!

שאלה 1

נתונה פונקצית גל של שני ביטים שאלי ובני מחלקים ביניהם:

$$|\Psi\rangle = N\left(|00\rangle + i|10\rangle - i|01\rangle + |11\rangle\right) = \sum a_{ij}|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B\,, \quad i,j=0,1$$

1. קבע את מקדם הנרמול N
2. מה האנטרופיה של פון נוימן של המצב $|\Psi\rangle$
3. חשב את הערכים הסינגולאריים של מטריצת המקדמים a
4. האם המצב $|\Psi\rangle$ שזור או מצב מכפלה.
5. חשב את פרוק שמידט של המצב $|\Psi\rangle$
6. חשב את מטריצת הצפיפות המצומצמת של אלי ρ_A
7. חשב את האנטרופיה של פון ניומן של ρ_A

פתרון:

1. כיון שהמצבים מאונכים $N=\frac{1}{2}$
2. כיון ש $|\Psi\rangle$ מצב טהור האנטרופיה שלו מתאפסת
3. כיון שהמטריצה $a=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}$ הרמיטית הערכים הסינגולאריים הם הערך המוחלט של הערכים העצמיים. כיון שהדטרמיננט מתאפס אחד הערכים העצמיים מתאפס. והשני נקבע מהעקבה $\frac{2}{N}=1$
4. כיון שיש ערך עצמי יחיד שונה מאפס למטריצה a המצב הוא מכפלה
5. הע"ע 1 מתאים לווקטור $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$ הפרוק הספקטראלי נותן $a=|e_1\rangle\langle e_1|$ והלכסון הוא $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}, \quad a=UDU^\dagger$ ולכן $|\Psi\rangle=\left(\sum U^\dagger_{i0}|i\rangle\right)\left(\sum U_{0j}|i\rangle\right)$ או בפרוש

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{2}\left(|0\rangle+i|1\rangle\right)\otimes\left(|0\rangle-i|1\rangle\right)=\frac{1}{2}\left(|00\rangle+i|10\rangle-i|01\rangle+|11\rangle\right)$$

6. מחשבים $_B\langle 1|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\left(-i|0\rangle + |1\rangle\right)$, $_B\langle 0|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right)$ ולכן

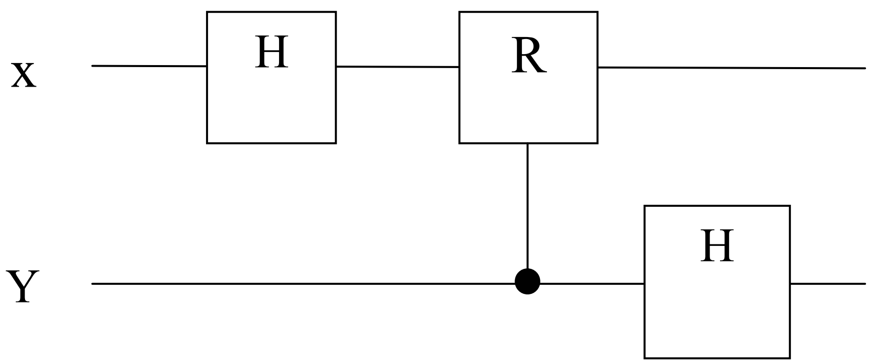
$$4\rho_A = \left(|0\rangle + i|1\rangle\right)\left(\langle 0| - i\langle 1|\right) + \left(-i|0\rangle + |1\rangle\right)\left(i\langle 0| + \langle 1|\right)$$
$$= 2\left(|0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1|\right)$$

7. כיון שהערכים העצמיים של מטריצת הצפיפות הם 1 ו 0 האנטרופיה מתאפסת.

שאלה 2

נתון המעגל הקוונטי שבציור. מכניסים כקלט למעגל את המצב $|xy\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$ כאשר $x, y \in 0,1$.

1. חשב את המצב לאחר שער הדמר הראשון
2. חשב את המצב לאחר השער $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
3. חשב את המצב בפלט
4. חשב את המטריצה U שמחשב המעגל בבסיס הסטנדרטי.
5. המעגל הזה קשור עם: טלפורטציה האלגוריתם של גרובר, חשוב טרנספורם פוריה?



פתרון

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + (-1)^x |1\rangle\right) \otimes |y\rangle$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + (-1)^x (i)^y |1\rangle\right) \otimes |y\rangle$
3. $\frac{1}{2}\left(|0\rangle + (-1)^x (i)^y |1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle + (-1)^y |1\rangle\right)$

4. את התוצאה של הסעיף הקודם נכתוב כמו

$\frac{1}{2}\left(|00\rangle+(-1)^{y}|01\rangle+(-1)^{x}(i)^{y}|10\rangle+(-1)^{x+y}(i)^{y}|11\rangle\right)$ ולכן המטריצה היא

$$U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & i & -1 & -i\\ 1 & -i & -1 & i\end{pmatrix}$$

5. מבטאת טרנספורם פורייה על שני ביטים

שאלה 3

מצב הסינגלט מוגדר על ידי:

$$|s\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle-|10\rangle\right)$$

1. האם $|s\rangle$ הוא מצב עצמי של $Z\otimes 1+1\otimes Z$, אם כן מה הערך העצמי המתאים
2. האם $|s\rangle$ הוא מצב עצמי של $X\otimes 1+1\otimes X$, אם כן מה הערך העצמי המתאים
3. הוכח כי $\langle s|\vec{X}\cdot\vec{m}\otimes\vec{X}\cdot\vec{n}|s\rangle$ תלוי רק בזוית בין הווקטור $\vec{n}$ לווקטור $\vec{m}$ ואורך הוקטורים
4. בהסתמך על הסעיף הקודם חשב את $\langle s|\vec{X}\cdot\vec{m}\otimes\vec{X}\cdot\vec{n}|s\rangle$
5. עבור $x,y=\pm1$ מגדירים את ארבעת האופרטורים $E_{xy}(\hat{m},\hat{n})=\frac{1}{2}\left(1+x\hat{m}\cdot\vec{X}\right)\otimes\left(1+y\hat{n}\cdot\vec{X}\right)$ כאשר $\hat{m},\hat{n}$ הם וקטורי יחיד. עבור אילו כיווני $\hat{m},\hat{n}$ האופרטורים הם POVM

פתרון

1. $Z\otimes 1|s\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle+|01\rangle\right),\quad 1\otimes Z|s\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle+|01\rangle\right)$ ולכן הווקטור הוא עצמי עם ע"ע 0
2. $X\otimes 1|s\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle-|11\rangle\right),\quad 1\otimes X|s\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|11\rangle-|00\rangle\right)$ ולכן הווקטור הוא עצמי עם ע"ע 0
3. מהסעיפים הקודמים הווקטור אינוריאנטי לסיבוב סביב ציר z וסביב ציר x ולכן אינוריאנטי לכל סיבוב. ניתן לכן לסובב את המערכת כך שהווקטור $\vec{m}$ מתלכד עם ציר z והווקטור $\vec{n}$ הוא במישור x-z בזוית θ לציר z

$$\langle s|\vec{X}\cdot\vec{m}\otimes\vec{X}\cdot\vec{n}|s\rangle=|\vec{m}||\vec{n}|\langle s|Z\otimes\left(Z\cos\theta+X\sin\theta\right)|s\rangle$$
$$=|\vec{m}||\vec{n}|\cos\theta\langle s|Z\otimes Z|s\rangle+|\vec{m}||\vec{n}|\sin\theta\langle s|Z\otimes X|s\rangle$$

לחילופין ניתן להשתמש ב: $\langle s|\sigma_i\otimes\sigma_j|s\rangle=-\delta_{ij}$

4.

עכשיו $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|11\rangle+|00\rangle\right)$ $Z\otimes X|s\rangle=$, $Z\otimes Z|s\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle-|01\rangle\right)$ ולכן

$\langle s|Z\otimes X|s\rangle = 0$, $\langle s|Z\otimes Z|s\rangle = -1$ ולבסוף $\langle s|\vec{X}\cdot\vec{m}\otimes\vec{X}\cdot\vec{n}|s\rangle = -m\cdot\vec{n}$

5. עבור $a=1/4$ האופרטורים $E_{xy}(\hat{n},\hat{m})$ הם הטלות. יתר על כן $\sum E_{xy}=1$. המערכת היא POVM לכל זוג וקטורי יחידה.