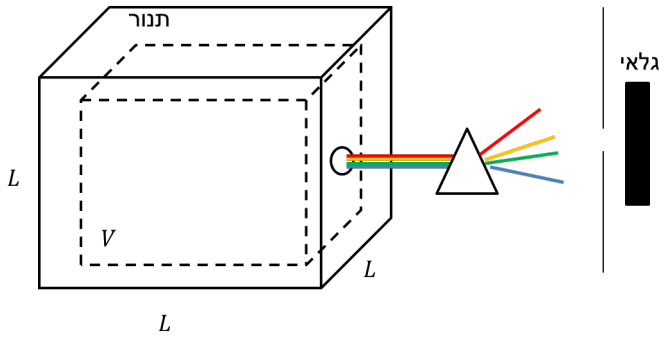
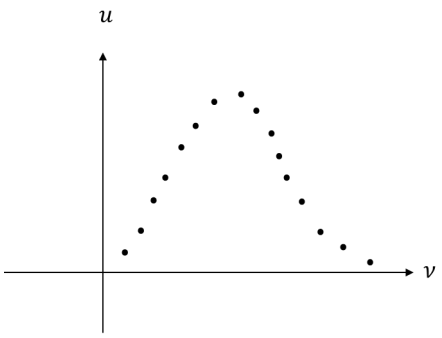
הרצאה 13 - קרינת גוף שחור

קרינת גוף שחור:
כאשר אנחנו מדברים על גוף שחור הכוונה היא לא לגוף שהצבע שלא הוא שחור, אלא לגוף שלא יוצא ממנו אור ניראה בטמפרטורת החדר. כאשר אנחנו לוקחים תנור ועושים חור בדלת ומסתכלים לתוך החור אנחנו רואים נקודה שחורה, כאשר מחממים את התנור והתנור מגיע לטמפרטורה מספיק גבוהה הוא זוהר ומתחיל לצאת אור מתוך החור. בהתחלה האור בגוון אדום וכשמחממים יותר בגוון כחול. אנחנו יכולים לשים מנסרה, מסך עם חריץ, וגלאי ולבדוק כמה אנרגיה עוברת דרך החריץ לגלאי בכל תדר של האור.



ככל שהחריץ יותר גדול יגיע יותר אנרגיה לגלאי כי הוא יאסוף יותר תדרים (יותר צבעים), ולכן על מנת שנקבל את אותן התוצאות במדידות שונות אנחנו צריכים לנרמל את האנרגיה במרווח התדרים שמאספים.
סימונים:
u = אנרגיה ליחידת תדר ליחידת נפח של התנור.
ν = תדר ביחידות של הרץ = $\frac{\omega}{2\pi}$.
בניסויי קיבלו את גרף התוצאות הבא:



ולא הצליחו להסביר את הגרף. פלאנק הכיר את תורת בולצמן שעוד לא היתה מקובלת לגמרי. כמובן שתורת הקוונטים לא היתה קיימת בכלל. הוא ניחש פונקציה (בשנת 1900):

$$u\left(\nu,T\right)=\frac{8\pi\nu^{3}}{c^{3}}\frac{h}{e^{\frac{h\nu}{k_{B}T}}-1} \tag{1}$$

כאשר c היא מהירות האור ו-h הוא קבוע שהיום ניקרא קבוע פלאנק.
מה שחשוב בניחוש הזה הוא התדר בשלישית במונה והאקספוננט במכנה. בזכותם מתקיימים שני גבולות $u\overset{\nu\to0}{\to}0,\ u\overset{\nu\to\infty}{\to}0$.
הגבול של תדר גבוה ברור. כדי לחשב את הגבול של תדר נמוך נפתח את אקספוננט סביב תדר אפס. מתקיים:

$$\lim_{(\nu\to0)}\#\frac{\nu^{3}}{1+\frac{h\nu}{k_{B}T}-1}\propto\lim_{(\nu\to0)}\nu^{2}=0 \tag{2}$$

פלאנק רצה לקבל את הניחוש שלו מתאוריה יותר יסודית. פלאנק חשב שהתנור חשוב בבעיה. פלאנק הסתכל על התנור כאילו יש בו מטענים וכל מטען קשור לנקודה שמחוברת לקפיץ, כאשר לכל קפיץ שמחובר למטען יש קבוע קפיץ שונה. ואז הוא עושה הנחה פראית. הוא מניח שאפשר למתוח את הקפיצים באופן דיסקרטי, לא באופן רציף, אבל כך שלקפיץ "1" למשל יש רק את האנרגיה:

$$E=h\nu\cdot s,\quad s=0,1,2,\ldots \tag{3}$$

כלומר, יש כל מיני קפיצים, לכן קפיץ יכול להיות אנרגיות דיסקרטיות שהן קשורות לתדר של הקפיץ והוא הוסיף קבוע שאומר כמה אנרגיה יכולה להיות לכל קפיץ. וזה נכון לכל אחד מהקפיצים. s מציין האם לא מתחתי את הקפיץ, האם מתחתי אותו ביחידה אחת, שתי יחידות וכו'... בינתיים זה הכל ניחושים. נזכר כי באותה תקופה לא ידעו מה זה גז ומה זה מוצק מבחינה אטומית, ולא היו בטוחים אם יש אטומים או לא. הקפיצים שפלאנק מדמיין חיים בתוך התנור על הגוף השחור עצמו, לא בתוך החלל שמהווה את החור. הרעיון של פלאנק היה שכל האנרגיות האפשריות ובהינתן טמפרטורה יש הסתברות לכל אנרגיה. עבור קפיץ "1" הסיכוי להיות באנרגיה s הינו:

$$P(s)=\frac{e^{-\frac{s\hbar\nu}{\tau}}}{Z}=\frac{e^{-\frac{s\hbar\omega}{\tau}}}{Z},\quad \hbar=\frac{h}{2\pi} \tag{4}$$

כאשר Z הינה פונקצית החלוקה. נחשב אותה:

$$Z=\sum_{s=0}^{\infty}e^{-\frac{s\hbar\omega}{\tau}}\overbrace{=}^{(*)}\frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}} \tag{5}$$

הסבר למעבר $(*)$ - זהו טור הנדסי שבו $a_0=1,\ q=e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}$ ויש נוסחא סגורה לסכום זה.
כעת אנחנו רוצים למצוא אנרגיה ממוצעת של קפיץ "1":

$$\langle E\rangle\overbrace{=}^{E=\hbar\omega s}\hbar\omega\langle s\rangle=\hbar\omega\sum_{s=0}^{\infty}s\cdot P(s)=\frac{\hbar\omega}{Z}\sum_{s=0}^{\infty}s\cdot e^{-\frac{s\hbar\omega}{\tau}} \tag{6}$$

נגדיר $y=\frac{\hbar\omega}{\tau}$ ונקבל:

$$\sum_{s=0}^{\infty}s\cdot e^{-\frac{s\hbar\omega}{\tau}}=\sum_{s=0}^{\infty}s\cdot e^{-sy}=-\frac{d}{dy}\sum_{s=0}^{\infty}e^{-sy}=-\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{1-e^{-y}}\right)=\frac{e^{-y}}{\left[1-e^{-y}\right]^2} \tag{7}$$

$$\Rightarrow\langle E\rangle=\frac{\hbar\omega}{Z}\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}}{\left[1-e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}\right]^2}=\hbar\omega\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{\tau}}} \tag{8}$$

מכפילים מונה ומכנה פי $e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}}$ ומקבלים:

$$\langle E\rangle=\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}-1} \tag{9}$$

נשים לב כי ההבדל בין הביטוי שאנחנו קיבלנו כאן לביטוי שפלאנק ניחש (שראינו בתחילת ההרצאה) הוא שבביטוי של פלאנק מופיע ν^3 וכאן יש לנו ω^1. אנחנו מצאנו מה האנרגיה הממוצעת של כל קפיץ, אבל אנחנו רוצים למצוא את האנרגיה הממוצעת של כל התנור. פלאנק מניח שיש קפיצים עם קבועי קפיץ שונים כך שיש הרבה/מעט קפיצים עם קבוע קפיץ חזק/חלש. אם מספר הקפיצים עם תדר ω פרופורציוני ל-ω^2 נקבל איכותית את הניחוש של פלנק.

אם הזמן התברר לפונקציה $u(\nu,T)$ אין קשר לדפנות התנור, תנורים שונים נותנים אותה קרינה. איינשטיין אמר שהקרינה של גוף שחור זאת תכונה של אור בריק (איינשטיין קידש את הריק). בימים ההם כמו שלא ידעו שגז עשוי מאטומים, לא ידעו ממה עשויה הקרינה הזאת. אינשטיין טען שהאור בנוי מחלקיקים, ולא שיש קפיצים בתוך התנור.

תיאור מודרני של קרינת גוף שחור:
נזכיר את משוואת מקסוול:

$$\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}=c^2\nabla^2\overrightarrow{E} \tag{10}$$

זוהי משוואת הגלים לשדה החשמלי. אנחנו פותרים כאילו דפנות הקופסא עשויות ממתכת. מתוך תנאי השפה:
מאחר ש-$\nabla\times\overrightarrow{E}=0$ ואין שדה בתוך מתכת מקבלים $E_{\parallel}=0$. מתוך $divE=0$ (ושאין מטען משטחי) מקבלים $\frac{\partial E_{\perp}}{\partial\overrightarrow{n}}=0$
(כאשר $\overrightarrow{n}$ מהמילה normal הינו ניצב למשטח יהיו עוד ים-n אז זהירות). מכיוון שאין מטענים בתוך הקופסא דרוש גם $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}=0$ בתוך הקופסה.

הפתרון הוא מהצורה:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x}\sin(\omega t)\cos\left(\frac{n_x\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{L}y\right)\sin\left(\frac{n_z\pi}{L}z\right) \\ E_y &= E_{0y}\sin(\omega t)\sin\left(\frac{n_x\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{L}y\right)\sin\left(\frac{n_z\pi}{L}z\right) \\ E_z &= E_{0z}\sin(\omega t)\sin\left(\frac{n_x\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{L}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{L}z\right) \end{aligned} \tag{11}$$

n_x, n_y, n_z מספרים שלמים חיוביים. נשים לב כי פתרון זה מקיים את תנאי השפה.
נגדיר: $\overrightarrow{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$, $\overrightarrow{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $n = |n| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$. כדי שמשוואת הגלים תתקיים דרוש קשר בין ω ל-n_x, n_y, n_z. מציבים את הפתרון במשואת הגלים ורואים שהקשר הוא $\omega = \frac{\pi}{L}c \cdot n$.
מתוך $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = 0$ נקבל גם $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{E}_0 = 0$. שמהות קשר זה הוא שהקומפוננט של האמפליטודה של הגל אינן בלתי תלויות. יש רק שני וקטורים בלתי תלויים שניצבים ל-$\overrightarrow{n}$ ולכן יש שני פתרון למשואת הגלים לכל $\overrightarrow{n}$ המקימים את תנאי השפה.
עד עכשיו ראינו שעבור קפיץ עם תדר ω_1 ואנרגיות דיסקרטיות לפי הניחוש של:

$$E_1 = \frac{\hbar\omega_1}{e^{\frac{\hbar\omega_1}{k_B T}} - 1} \tag{12}$$

הרעיון בקרינת גוף שחור הוא שיש כל מיני גלים אל"מ בתוך הקופסא. אנחנו לא קובעים לקופסא איזה $\overrightarrow{n}$ -ים יהיו אבל הקופסא מחוברת לטמפרטורה. אנחנו מניחים כי כל $\overrightarrow{n}$ מותר. נסתכל למשל על: $\overrightarrow{n} = (3,2,1)$. ה-$\overrightarrow{n}$ הזה מייצג גל. אוסף המספרים $(3,2,1)$ מתאר לי איך הוא נראה במרחב ואיך הוא נראה בזמן. אבל הסט $(3,2,1)$ לא אומר לי מה האמפליטודה של הגל. הסט $(3,2,1)$ שקול למי הקפיץ שעליו אנו מסתכלים או יותר נכון, מה התדר של הקפיץ עליו אנו מסתכלים. $(3,2,1)$ של גלים שקול ל-ω_1 בקפיצים. בשני המיקרים איננו יודעים את האמפליטודה של הגל או הקפיץ. אם ניקח את הרעיון של פלנק עבור קפיצים לגלים אז לכל גל אמפליטודה דיסקרטית. לכל גל אל"מ יש אנרגיה, אנחנו אומרים שבמקום שהקפיץ יהיה מתוח בגדלים דיסקרטיים אז נאמר שהשדה של הגל הוא דיסקרטי. הדיסקרטיזציה של האמפליטודה נעשית דרך האנרגיה של הגל והתדר שלו. כל זה ניחוש בינתיים, אין בשלב זה של ההיסטוריה תורה קוונטית מאחורי זה. אנחנו צריכים להראות שהמעבר מקפיצים לגלים מייצר את הפקטור שהיה חסר לנו (את ההבדל בין ν ל-ν^3) באופן טבעי. אמרנו ש-$\omega = \frac{\pi}{L}c \cdot n$ ולכן קומבינציות שונות של $\overrightarrow{n}$ יתנו לנו את אותו התדר (למשל הקומבינציות אשר ייתנו לנו את אותו התדר, זה ההסבר לכך שיש יותר "קפיצים" עם תדר גבוה מאשר עם תדר נמוך. $\overrightarrow{n}_1 = (1,2,3)$, $\overrightarrow{n}_2 = (3,1,2)$ יתנו את אותו n). ככל שניקח ערכי $\overrightarrow{n}$ גדולים יותר יהיו לנו יותר קומבינציות

<u>הערות:</u>

1. קיטוב אומר שיש 2 וקטורי $\overrightarrow{E}_0$ בלתי תלויות לינארית. אז כל אמפליטודה שלישית של הגל היא חיבור וקטורי של שתי האמפליטודות המקוריות. נסמן ב p את הקיטובים.
2. לשדה אלקטרומגנטי יש חיים משל עצמו. הוא לא חייב מטענים בסביבה שבו הוא קיים. הטמפרטורה מייצרת את השדה. ליקום יש קרינת גוף שחור בטמפרטורה של 2.7 קלווין גם באזורים בהם אין מטען.

עכשיו אנחנו רוצים למצוא את האנרגיה הכוללת:

$$U = \sum_{p=1,2}\sum_{\overrightarrow{n}} E_{\overrightarrow{n}} \tag{13}$$

מקודם חישבנו את האנרגיה של קפיץ "1" אבל אמרנו שאנחנו צריכים לסכום על כל הקפיצים. עכשיו אנחנו רוצים לעשות את אותו הדבר, רק שאנחנו קוראים לכל גל לפי ה-$\overrightarrow{n}$ שלו. לסכום על כל הקפיצים לפי המספר שלהם זה אומר לסכום על כל ה-$\overrightarrow{n}$-ים. נשים לב שאנחנו סוכמים על כל ה-$\overrightarrow{n}$-ים, גם כאלה שנותנים לנו את אותו התדר. ה-$\overrightarrow{n}$-ים מרוחקים יחידה אחת אחד מהשני ולכן אין צורך בתיקון במעבר מסכימה לאינטגרציה:

$$U = \sum_{p=1,2}\sum_{\overrightarrow{n}} E_{\overrightarrow{n}} = 2\int \frac{\hbar\omega_{\overrightarrow{n}}}{e^{\frac{\hbar\omega_{\overrightarrow{n}}}{\tau}} - 1} d^3n \tag{14}$$

לגל נע n יכול להיות חיובי או שלילי (נע ימינה או שמאלה), אבל במקרה שלנו אלה גלים עומדים, בגלים עומדים מותר ל-n להיות 0 ואין הבדל בין $n = 1$ או $n = -1$, זה רק משנה רק את הסימן של רכיב מסוים באמפליטודה. אבל אנחנו במלא לוקחים בחשבון רק שני סוגי רכיבי אמפליטודות (שני קיטובים). אנחנו עושים אינטגרל תלת ממדי. אנחנו צריכים לרוץ על כל ה-n-ים ואנחנו עושים את זה ע"י קליפות שוות n. בגלל שאין הבדל בין n שלילי לחיובי אנחנו נסתכל רק על רביע אחד (מתוך 8 הרביעים), כלומר ניקח את כל הקליפה אבל נחלק ב-8. בגלל הקיטוב אנחנו נכפיל פי 2, סה"כ נקבל:

$$U = 2 \cdot \frac{1}{8} \int 4\pi n^2 dn \frac{\hbar\omega_{\vec{n}}}{e^{\frac{\hbar\omega_{\vec{n}}}{k_B T}} - 1} \tag{15}$$

כדי לתאר גל אני צריך לציין את n_x, n_y, n_z ואת הקיטוב מבין שני הקיטובים. על מנת לפתור את האינטגרל הנ"ל נזכר כי $\omega_{\vec{n}} = \frac{\pi}{L} c \cdot n$.
עברנו לקואורדינטות כדוריות, $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$. אז עכשיו ω_n היא כבר לא פונקציה של משתנה דיסקרטי אלה פונקציה של משתנק רציף.

$$\omega = \frac{\pi}{L} c \cdot n, \quad \frac{\omega}{\frac{\pi}{L}c} = n, \quad \frac{d\omega}{\frac{\pi}{L}c} = dn \tag{16}$$

נקבל:

$$U = \pi \int \left(\frac{\omega}{\frac{\pi}{L}c}\right)^2 \frac{d\omega}{\frac{\pi}{L}c} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} = \frac{L^3}{c^3\pi^2} \int d\omega \overbrace{\frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}} - 1}}^{(**)} \tag{17}$$

כדי לחשב את האנרגיה הכוללת אנחנו צריכים לסכום על כל התדרים כאשר בכל אינטרוול תדר יש לנו $(**)$ אנרגיה, וזה מה שכתוב בביטוי ל-u של פלאנק.
קיבלנו:

$$u = \frac{U}{V \cdot (\text{יחידת תדר})} = \frac{\hbar\omega^3}{c^3\pi^2 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1\right)} \tag{18}$$

פלאנק ואינשטיין הובילו לגילוי שהגלים האלקטרומגנטיים בנויים מפתיתים של אנרגיה או קוונטות של אנרגיה, וכל קוונטה היא $\hbar\omega$. איינשטיין השתמש במונח קוונטות של אור. מהנוסחה של פלאנק אפשר למדוד את k_B. אם אנחנו יודעים את k_B ואת קבוע גזים אידאליים R אנחנו יכולים למצוא את מספר אבוגדרו. זה מצב מוזר. איך אור מגלה לנו מהו מספר אבוגדרו? איכשהו באור קבור מספר אבוגדרו ולכן נכנס לאינשטיין הרעיון שזה גז של פוטונים.
כעת נענה על השאלה למה למשוואת שרדינגר וביחוד למה יש נגזרת אחת לפי הזמן ולמה יש i?

הרי במשואת גלים כמו (10) יש שתי נגזרות לפי המזמן ואין i.

משואת שרדינגר התלויה בזמן לחלקיק חופשי (בלי פוטנציאל).

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi \tag{19}$$

על בסיס "סטתרמית" פלאנק אמר שיש קשר בין אנרגיה של החלקיקים לתדר של הגל המיצג אותם לפי הקשר $E = \hbar\omega$ לפחות לאור. דה-ברולי טען שלאלומה של חלקיקים יש תנע $(\overrightarrow{p})$ ו-$\overrightarrow{p} = \hbar \overrightarrow{k}$. אז נניח ששני הקשרים נכונים לכל סוג של חלקיקים. שרדינגר חיפש משוואת גל שיחס הנפיצה שלה הוא $E = \frac{p^2}{2m}$ לפחות במקרה של חלקיק חופשי.

נציב גל מישורי $\Psi(\overrightarrow{r}, t) = \psi e^{i\left(\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r} - \omega t\right)}$ בשרדינגר:

$$\Rightarrow \hbar\omega\psi = \frac{\hbar^2}{2m} \overrightarrow{k}^2 \psi \tag{20}$$

ומקבלים (עם פלאנק ודה-ברולי) את יחס הנפיצה ששרדינגר רצה לקבל:

$$E = \frac{\hbar^2 \overrightarrow{k}^2}{2m} \tag{21}$$

אם שרדינגר היה כותב משואת גל עם שתי נגזרות בזמן לא היינו מקבלים את (21).

עכשיו נותר לשאול איך להוסיף את הפוטנציאל. החלקיק צריך להרגיש את הפוטנציאל. אפשר לדמיין הרבה אופציות. נבדוק שתי אופציות $V\Psi$ ו-$V|\Psi|^2$. האופציה השנית הגיונית כי זה הסיכוי למצוא חלקיק במקום מסוים כפול ערך הפוטנציאל. אבל אופציה זאת לא תיתן מד"ח לינארית. זאת לא תהיה בעיית ערכים עצמיים עם מספר רב של פתרונות. לכן שרדינגר מישתמש באופציה הראשונה. למעשה רק האופציה הראשונה זאת בעיית ערכים עצמיים. במאמרו הוא פותר את אטום המימן $V(r) = q/r$ ומקבל את הספקטרום שנימדד בניסויים. כל השאר היסטוריה.

הרצאה 14 - קרינת גוף שחור המשך

כל השיעור הוא חזרה על השיעור הקודם בשפה יותר מודרנית.
ראשית נציין כי בהרצאה זו E מסמן שדה חשמלי. U ו-u מסמנים אנרגיה. קיבלנו בהרצאה הקודמת שממשוואת הגלים: $\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \overrightarrow{E}$ יחד עם $\nabla \times \overrightarrow{E} = 0$ ואין שדה בתוך מתכת מקבלים $E_{\parallel} = 0$. מתוך $divE = 0$ (ושאין מטען משטחי) מקבלים $\frac{\partial E_{\perp}}{\partial \overrightarrow{n}} = 0$ (כאשר $\overrightarrow{n}$ מהמילה normal הינו ניצב למשטח יהיו עוד ים-n אז זהירות).

$$
\begin{aligned}
E_x &= E_{0x} \sin(\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \\
E_y &= E_{0y} \sin(\omega t) \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right), \quad n_x, n_y, n_z = 0, 1, \dots \\
E_z &= E_{0z} \sin(\omega t) \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right)
\end{aligned} \tag{1}
$$

נגדיר:

$$
\begin{aligned}
k_x &= \frac{\pi}{L} n_x \\
k_y &= \frac{\pi}{L} n_y, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \\
k_z &= \frac{\pi}{L} n_z
\end{aligned} \tag{2}
$$

ממשוואת הגלים נקבל את הקשר:

$$\omega = c \cdot k$$

.
מאחר ש- $divE = 0$ יש לגל 2 פתרונות שונים איכותית.

בהתחלה כאשר ניסינו להסביר את התופעה של קרינה מגוף שחור דיברנו על קפיצים שנמצאים בתוך החומר ואמרנו שלפלאנק יש נתונים ניסיוניים והוא מנסה בכל הכוח למצוא דרך להסביר אותם. פלאנק התחיל בהשערות אשר נוגעות לדפנות התנור עצמו, אבל מאחר שראו כי תוצאות הניסוי לא תלויות בתנור הבינו שהשערות היו שגויות והתנור עצמו לא רלוונטי.

פלאנק הסביר את התופעה ע"י כך שיש בתנור עצמו קפיצים אשר קשורים לנקודות מסוימות בקיר התנור, וכל קפיץ מחובר למסה עם מטען. באופן כללי אנרגיה של קפיץ נתונה ע"י:

$$U_{spring} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \tag{3}$$

כאשר ω הינה תדירות הקפיץ ו-A אמפליטודה התחלתית או אמפליטודה מקסימאלית. באופן קלאסי, אנחנו יכולים למתוח את הקפיץ איך שאנחנו רוצים (באופן רציף), כלומר לקפיץ יכולה להיות כל אמפליטודה. פלאנק ניסה את הרעיון שהאמפליטודות דיסקרטיות (ולא יכולות לקבל כל ערך שנרצה). האמפליטודות האפשריות ייקבעו האנרגיות המותרות. הוא ניחש שהן $\hbar\omega \cdot s$ כאשר s מספר שלם, ונוכל לקבל את האמפליטודות לפי הקשר:

$$\frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \hbar \omega \cdot s \tag{4}$$

בתוך הקופסא יכולים להיות כל מיני קפיצים בכל מיני תדרים והקשר הנ"ל נותן אמפליטודות שונות לכל קפיץ. במהלך כל ההרצאה נעשה את ההקבלה בין המודל של הקפיצים בגוף התנור למודל של גלים אל"מ בתוך התנור. באופן דומה למודל של הקפיצים אנחנו יכולים לייצר בקופסא איזה גל אל"מ שאני רוצה, כמו שבגיטרה אני יכול למתוח את המיתר כמה שאני רוצה.

קפיץ מאופיין ע"י תדר, גל אל"מ מאופיין ע"י מספר גל. מספר גל קובע את תדירות הגל **אבל לא את האמפליטודה** שלו, האמפליטודה קשורה לאנרגיה. מישהו צריך להחליט מה תהיה האנרגיה של הגל. במקרה הקנוני זאת תהיה הטמפרטורה.

לשם השואה עם (4) נחשב באופן קלאסי את האנרגיה ליחידת נפח אשר נובעת מהשדה החשמלי, עבור גל $\overrightarrow{k}$ ממוצע על זמן מחזור ונפח. נזכיר כי בפיסיקה 2פ ראינו כי האנרגיה של גל אל"מ קשורה ל-$\int \frac{E^2}{8\pi} dV$ ב-$c.g.s$ ולכן נקבל:

$$\langle u\rangle_{\overrightarrow{k}}^{E_0}=\frac{1}{TV}\int_0^T dt\int dV\frac{E^2}{8\pi}=\ldots=\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{\overrightarrow{E}_0^2}{8\pi} \tag{5}$$

כאשר $\overrightarrow{E}_0=(E_{0x},E_{0y}E_{0z})$.
נחזור רגע לקפיץ. כאשר אני מותח קפיץ אני יודע כמה אנרגיה אני משקיע וזה קובע את האמפליטודה. כאשר אני משחרר את הקפיץ האנרגיה הפוטנציאלית שהשקעתי בקפיץ הופכת לאנרגיה קינטית וחוזר חלילה. מתקיים: בקפיץ ממוצע של האנרגיה הקינטית + ממוצע אנרגיה פוטנציאלית = אנרגיה התחלתית. באופן דומה, בגל אל"מ האנרגיה מתחלפת בין השדה החשמלי למגנטי באופן שווה, ולכן אם נעשה ממוצע בזמן של האנרגיה החשמלית ונכפיל פי 2 נקבל את סך כל האנרגיה. האנרגיה מתחלקת חצי-חצי בין אנרגיה פוטנציאלית וקינטית בקפיץ, ובין שדה חשמלי למגנטית בגל אל"מ. נקבל:

$$\langle u\rangle_{\overrightarrow{k}}=\langle u\rangle_{\overrightarrow{k}}^{E}+\langle u\rangle_{\overrightarrow{k}}^{B}=2\langle u\rangle_{\overrightarrow{k}}^{E}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{\overrightarrow{E}_0^2}{8\pi} \tag{6}$$

מאופן הגדרת $U=u\cdot V$ נקבל:

$$\langle U\rangle_{\overrightarrow{k}}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{\overrightarrow{E}_0^2}{8\pi}V \tag{7}$$

וזוהי סך כל האנרגיה האגורה בגל אל"מ מסוים (ולכן יש לנו את האינדקס $\overrightarrow{k}$) בתוך הקופסא. עכשיו רואים כי קביעת האנרגיה של גל אלקטרומגנטי מסוים קובעת את האמפליטודה שלו. לגל א"מ מסוים ($\overrightarrow{k}$ מסויים) קוראים לפעמים מוד או אופן תנודה. כדי להסביר גוף שחור נאמר שהאנרגיה של מוד (מספר גל) מסוים יכולה להיות רק:

$$\langle U\rangle_{\overrightarrow{k}}=\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)\cdot s_{\overrightarrow{k}},\quad s_{\overrightarrow{k}}=0,1,\ldots \tag{8}$$

בהינתן s ומוד $\left(\overrightarrow{k}\right)$ אנחנו יכולים לדעת את האנרגיה של הגל ומשם את האמפליטודה של השדה החשמלי $\left(\overrightarrow{E}_0\right)$ (את הנפח אנחנו גם יודעים) וגם להיפך. בהינתן אנרגיה אנו יודעים מהו s. ההקבלה לקפיץ היא שבהינתן s עבור קפיץ מסוים אנחנו יכולים לדעת האנרגיה ומשם את האמפליטודה ולהיפך. בהתפלגות של בולצמן מופיעה האנרגיה ולכן יותר נוח לנו לחשוב על אנרגיה מאשר על אמפליטודה. פלאנק טען שמותר רק אוסף דיסקרטי של אנרגיות (ומכאן אמפליטודות).
נשים לב מהקשר בין $\overrightarrow{k}$ ל-ω שיש הרבה וקטורים $\overrightarrow{k}$ אשר נותנים את אותו התדר ω, כאשר ככל שהתדר גדול יותר יש יותר $\overrightarrow{k}$ - ים אשר נותנים אותו. לכן יש יותר גלים (מודים או אופני תנודה) אם ω גדול מאשר אם ω קטן. פלאנק מדמיין הרבה קפיצים כאשר יש יותר קפיצים עם תדרים גבוהים.

נשים לב כי עד כה דיברנו על 2 סוגים של מספרים דיסקרטיים:

1. $\overrightarrow{n}$ - שם הגל. זה מקביל לשם הקפיץ.
2. s - כמה אנרגיה מותר שתהיה לגל / קפיץ.

כל זה היה ניחוש של פלאנק.

נסתכל על גל ספציפי ($\overrightarrow{k}$ נתון) ונשאל מה הסיכוי שלגל הזה תהיה אמפלטודה $\overrightarrow{E}_0$? מאחר שאת האמפליטודה אנחנו יכולים לקבל מ-s, זה שקול לשאלה מה ההסתברות למצוא את האנרגיה שמתאימה לערך s, שזה בעצם ההסתברות למצוא את s (כי s קובע לנו את האנרגיה). הסיכוי הנ"ל נתון ע"י (עבור קפיץ/ גל מסוים):

$$p_{\overrightarrow{k}}(s)=\frac{e^{-\beta\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)\cdot s}}{Z} \tag{9}$$

כאשר Z הינה פונקצית החלוקה.

$$Z_{\overrightarrow{k}}=\sum_s e^{-\beta\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)\cdot s} \tag{10}$$

נשים לב כי אם אנחנו יודעים את $p(s)$ אנחנו יכולים למצוא את $\langle s\rangle_\beta$ עבור גל נתון (כאשר הממוצע כאן הוא ממוצע תרמודינמי, זה ממוצע על s), מתוך כך נוכל לקבל:

$$\left\langle\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{\overrightarrow{E}_0^2}{8\pi}V\right\rangle=\left\langle\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)\cdot s\right\rangle_\beta=\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)\langle s\rangle_\beta \tag{11}$$

נשים לב כי הממוצע כאן הוא ממוצע על s והוא שונה מהממוצעים שעשינו קודם כשחישבנו את האנרגיה של גל א"מ. מקודם עשינו ממוצע לפי הזמן והמרחב של השדה החשמלי, כאן אנחנו רצים על ערכי s האפשריים ולכל ערך שאנחנו לוקחים את הסיכוי שלו, וזהו ממוצע מסוג אחר. בשיעור הקודם מצאנו את $\langle s\rangle$ וראינו כי $\beta\hbar\omega$ הולכים יחד בכל החישובים ולכן אין משמעות האם הסתכלנו על הבעיה כעל קפיצים או גל אל"מ. התוצאה שקיבלנו:

$$\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)\langle s\rangle_\beta=\frac{\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)}{e^{\frac{\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)}{\tau}}-1} \tag{12}$$

וזוהי האנרגיה הממוצעת עבור קפיץ/ גל מסוים עם תדר נתון (בגלים התדר נקבע ע"י $\overrightarrow{k}$ בקפיצים ע"י תדר הקפיץ). כעת אנחנו רוצים למצוא אנרגיה ממוצעת על פני כל הגלים. צריך לסכם על כל ארכי $\overrightarrow{k}$ האפשריים. נעבור ישר לאינטגרל בקואורדינטות כדוריות.

$$U=2\sum_{\overrightarrow{k}}\frac{\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)}{e^{\frac{\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)}{\tau}}-1}=2\cdot\frac{1}{8}\int\frac{4\pi k^2}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^3}dk\frac{\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)}{e^{\frac{\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)}{k_BT}}-1} \tag{13}$$

כאשר מה שעשינו זה הסתכלנו על הבעיה במרחב k התלת מימדי: חילקנו את המרחב לקליפות שוות k בעובי dk ומכאן מגיע $4\pi k^2dk$. כאשר עשינו את זה אנחנו לקחנו את הקליפה על כל המרחב, כלומר גם על ערכי k_x,k_y,k_z שליליים, אבל אמרנו בתחילת ההרצאה ש-k_x,k_y,k_z חיוביים ולכן עלינו לקחת רק שמינית מהמרחב ולכן חילקנו פי 8. לכל גל יש שני קיטובים ולכן הכפלנו פי 2. במרחב n המרחק בין זוג שנתות היה 1, אבל בציר k המרחק בין כל זוג שנתות הוא $\frac{\pi}{L}$ ומאחר שאנחנו במרחב תלת מימדי אנחנו צריכים לחלק ב-$\left(\frac{\pi}{L}\right)^3$. הסבר נוסף, עבור כל שם גל אנחנו יכולים לייצג כנקודה במרחב k. המרחב מלא בנקודות, ואנחנו לוקחים רק את הנקודות שנמצאות ברביע הראשון. כאשר עברנו מסכימה לאינטגרציה אנחנו צריכים לחלק בצפיפות הנקודות, בכמות הנקודות שיש בכל אינטרוול בגודל d^3k. במקרה שלנו, אנחנו מסתכלים על קוביות והגודל של כל קוביה הוא $\left(\frac{\pi}{L}\right)^3$. כל מה שנותר באינטגרל הוא האנרגיה הממוצעת שראינו שכל k תורם.
נוכל לרשום גם:

$$U=2\cdot\int\frac{V}{2\pi^2}k^2dk\frac{\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)}{e^{\frac{\hbar\omega\left(\overrightarrow{k}\right)}{k_BT}}-1} \tag{14}$$

נסמן $g(k)=\frac{V}{2\pi^2}k^2$ = צפיפות המצבים במרחב k. אנחנו רוצים לבצע החלפת משתנים מ-k ל-ω ולכן אנחנו רוצים שכל קליפה בעובי dk תעבור למלבן במרחב ω בגובה $g(\omega)$ ובאורך $d\omega$. הדרישה היא:

$$g(k)\,dk=g(\omega)\,d\omega \tag{15}$$

אנחנו רוצים פונקציה $g(\omega)$ שתעביר אותי ממרחב k למרחב ω כך שיתקיים השוויון הנ"ל, כלומר:

$$g(\omega)=g(k)\left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{k=k(\omega)}=g(k)\left.\frac{1}{\frac{d\omega}{dk}}\right|_{k=k(\omega)} \tag{16}$$

במקרה שלנו:

$$g(\omega)\,d\omega=\frac{V}{2\pi^2}k^2dk \tag{17}$$

נשתמש בקשר $\omega=ck$ שראינו בתחילת ההרצאה ונקבל:

$$g(\omega)=\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{1}{c}=\frac{V}{2\pi^2}\frac{\omega^2}{c^3} \tag{18}$$

$$\Rightarrow U=2\int_0^\infty g(\omega)\,d\omega\frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}-1}=\int_0^\infty\frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}-1}d\omega \tag{19}$$

מכך נסיק כי האנרגיה בתוך הגוף השחור בנויה כך שמכל אינטרוול תדרים $d\omega$ אנחנו מקבלים תרומה:

$$u(\omega,\tau)=\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}-1} \tag{20}$$

לאנרגיה. כדי לדעת את סך כל האנרגיה הכוללת עלינו לרוץ על כל התדרים ובכל אינטרוול תדרים יש $U(\omega,\tau)$ ליחידת תדר. נסכם את כל התרומות ונקבל את סך כל האנרגיה. זה אומר שאחרי המנסרה, בכל אלמנט של תדר צריך לקבל $u(\omega,\tau)$ אנרגיה. אם נזיז את הגלאי ונסכום על כל האנרגיות שהגיעו לגלאי אנחנו צריכים לקבל את U.

ראינו קודם כי אין הרבה מודים בתדרים נמוכים אבל בתדרים גבוהים יש הרבה מודים. תיאוריית הקפיצים של פלאנק לא מסבירה את התופעה הזאת.

איינשטיין אמר שמכיוון שאנחנו מרשים רק אוסף דיסקרטי של אנרגיות זה כאילו שיש חלקיקים בתוך התנור והמספר s סופר מכמה חלקיקים (פוטונים) מורכב הגל האל"מ. אם אני לוקח אנרגיה של גל אל"מ ומחלק ב-$\hbar\omega$ אני מוצא כמה חתיכות של אנרגיה יש לגל. אינשטיין כינה את זה קוונטות של אנרגיה. אנחנו לא רואים ולא מרגישים אותם אז קשה לנו להבין את זה. היום אנו קוראים ל-s מספר הפוטונים, זה המספר של גושי אנרגיה שיש בקרינה אל"מ. כל פוטון מגיע עם אנרגיה $\hbar\omega$.
$E=\hbar\omega$ האנרגיה של פוטון בתדר ω. הקשר הזה נקרא איינשטיין-פלנק.

שרדינגר בונה מאינשטיין-פלאנק ודה-ברולי משואת גלים. מצליח לתאר את אטום המימן ומכניקת הקוונטים נולדת.
נותר לנו לפתור את האינטגרל:

$$U=\frac{V}{\pi^2c^3\hbar^3}\int_0^\infty\frac{\hbar^3\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}}-1}d\hbar\omega \tag{21}$$

נבצע החלפת משתנים: $y=\frac{\hbar\omega}{\tau}$ ונקבל:

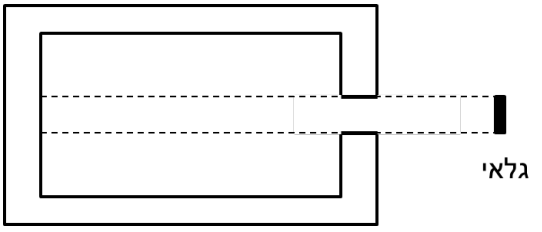
$$U=\frac{V\tau^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\underbrace{\int_0^\infty\frac{y^3}{e^y-1}dy}_{=\frac{\pi^4}{15}}=\frac{V\pi^2}{15c^3\hbar^3}\tau^4=\frac{\pi^2V}{15c^3\hbar^3}k_B^4T^4 \tag{22}$$

$$\Rightarrow\frac{U}{V}=\frac{\pi^2}{15c^3\hbar^3}k_B^4T^4 \tag{23}$$

זה לא משנה ממה עשויים הקירות של התנור (מוליכים/ מבודדים), אם אנחנו בחלל או בכדור הארץ, כל זמן שיש טמפרטורה היא מייצרת אנרגיה וקרינה. מהטמפרטורה נקבל שדה חשמלי ומגנטי והם יכולים להימצא גם בריק.

מעניין שגם גוף שאינו בצורת תיבה ואפילו כשאין לו דפנות פולט קרינת גוף שחור.

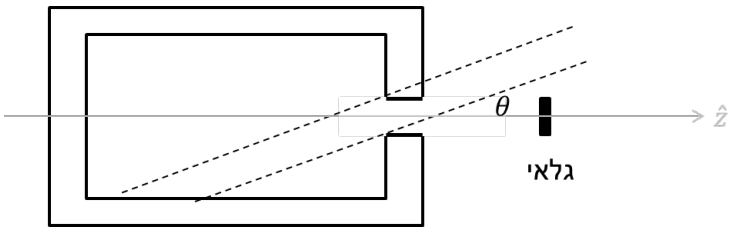
כעת נגיד שיש לנו גלאי שאוסף את כל האנרגיה (בלי המנסרה) ואנחנו שואלים מהו שטף האנרגיה הכולל שיוצא מהתנור.
נסתכל על התנור מהצד קודם ישר לתוך החור:



דהיינו הגלאי נמצא מול הפתח. נקרא לקווים המקווקוים בציור עמוד קרינה. נחשב את השטף שיוצא לכיוון אחד, שהוא חצי מהאנרגיה בשיש בעמוד קרינה כי הגלים העומדים בנויים מגלים נעים ימינה ושמאלה

$$J_{\text{שף}}=\text{שטף}=\frac{\text{עמוד אנרגיה}}{\text{שטח}\cdot\text{יחידת זמן}}=\frac{U}{2V}\frac{c\cdot t\cdot a}{a\cdot t}=\frac{U}{2V}\cdot c$$

כאשר a - שטח הפתחת, t - הזמן שלוקח לעמוד של אור לצאת, $c\cdot t$ - המרחק מקצה התנור עד תחילתו (אורך העמוד בתוך התנור) ולכן $c\cdot t\cdot a$ זה נפח העמוד.
הטמפרטורה בתנור נשארת קבועה וזה מה שממלא מחדש את האנרגיה שיוצאת.
נסתכל על הפתח מהצד. מהצד הפתח ניראה יותר קטן:



נרוץ עם הגלאי על פני חצי ספרה. הספק הקרינה (אנרגיה ליחידת זמן) שמגיעה לגלאי בנקודה θ, φ הוא:

$$P(\theta,\varphi) = \frac{Uc}{2V} a \cdot cos\theta$$

נמצע על פני חצי הספרה. ההספק הממוצע הוא:

$$\langle P \rangle = \frac{Uca}{2V}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos\theta d\varphi d(\cos\theta) = \frac{Uca}{4V\pi}\pi$$

נחלק בשטח הפתח:

$$J_{total} = \frac{P_{total}}{a} = \frac{Uc}{4V}$$

זה השטף היוצא מהפתח לכל הכיוונים.
נקבל:

$$J_{total} = \frac{\pi^2 c}{15c^3\hbar^3}(k_B T)^4 \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{60c^2\hbar^3}(k_B T)^4 \quad (24)$$

נסמן $\sigma_{sb} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60c^2\hbar^3}$ ונקבל את חוק סטפן- בולצמן:

$$J_{total} = \sigma_{sb} T^4 \quad (25)$$

זהו השטף האנרגיה הכולל הנפלט מהחור לכל הכיוונים. מה שחשוב ושימושי בחוק הזה הוא החזקה T^4, זה אומר שאם מכפילים טמפרטורה של גוף פי 2 אנחנו נקבל פי 16 יותר שטף אנרגיה נפלטת.

קרינת גוף שחור משמשת להרבה דברים, ביניהם:

1. מדידת טמפרטורה של כוכבים בשמיים - שמים מנסרה ומודדים את הספקטרום שמתקבל ומתאימים להתפלגות של פלנק.
2. מדידת חום גבוה מאוד - אם יש לנו תנור אשר יש בתוכו חום מאוד גבוה, אין מכשירי מדידה אשר עמידים בפני חום כזה ולכן נשתמש בקרינת גוף שחור.

אנטרופיה של קרינת גוף שחור תלת מימדי:
אנחנו חוזרים לבעיה הקודמת שבה קיבלנו:

$$U = \frac{\pi^2 V}{15\hbar^2 c^3}\tau^4 \quad (26)$$

אנחנו יודעים כי:

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial U}\right)_V \quad (27)$$

ולכן בנפח קבוע מתקיים $d\sigma = \frac{dU}{\tau}$.
נחשב:

$$dU = \frac{4\pi^2 V\tau^3}{15\hbar^2 c^3}d\tau \Rightarrow d\sigma = \frac{4\pi^2 V\tau^2}{15\hbar^2 c^3}d\tau \Rightarrow \sigma = \frac{4\pi^2 V}{45\hbar^2 c^3}\tau^3 + f(V) \quad (28)$$

על מנת ש-σ תהיה אקסטנסיבית צריך להתקיים $f(V)=\alpha V$. ובנוסף אנחנו רוצים שיתקיים $\sigma \overbrace{\to}^{\tau\to 0} 0$ ולכן נקבל ש-$\alpha=0$. כלומר, קיבלנו כי:

$$\sigma=\frac{4\pi^2 V}{45\hbar^2 c^3}\tau^3 \tag{29}$$

מתקיים:

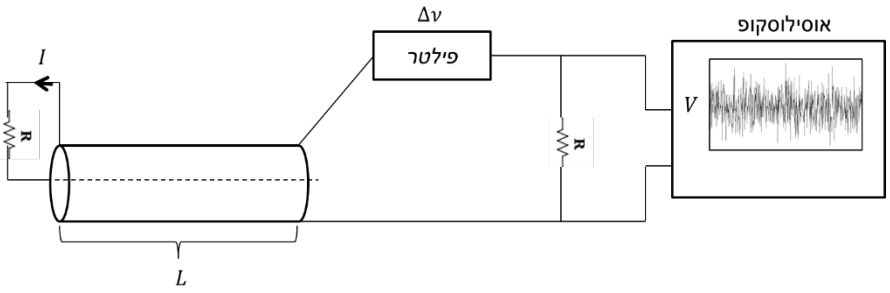
$$F=U-\tau\sigma=\frac{\pi^2 V}{15\hbar^2 c^3}\tau^4-\frac{4\pi^2 V}{45\hbar^2 c^3}\tau^4=-\frac{\pi^2 V}{45\hbar^2 c^3}\tau^4 \tag{30}$$

$$P=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_\tau=\frac{\pi^2}{45\hbar^2 c^3}\tau^4=\frac{U}{3V} \tag{31}$$

קיבלנו כי בקופסא חמה יש אנרגית קרינה והיא לוחצת על הדפנות ומייצרת עליהן לחץ. ניתן לקבל שקרינה מייצרת לחץ ואת הקשר האחרון למשל ע"י שימוש בחלקיקם אולטרה יחסותיים כמו שנעשה בתרגיל בית. אין סתירה בין הרעיונות של פלנק לבין כל מה שידענו עד כה על קרינה.

הרצאה 15 - רעש ופוטנציאל כימי

רעש:
נסתכל על כבל קואקסיאלי. כבל קואקסיאלי הוא הכבל שמחבר בין ממירי הוט/יס לקיר/צלחת למשל. לכבל קואקסיאלי יש גיד מרכזי וגליל מסביב ואפשר לפתור את משואת הגלים בתוכו. התפקיד של כבל קואקסיאלי הוא להוביל גלים.



נחבר את הכבל לאוסילוסקופ. באופן עקרוני באוסצילסקופ יש פילטר ונגד אבל כאן אנחנו מציירים אותם בחוץ לשם הדגשה.

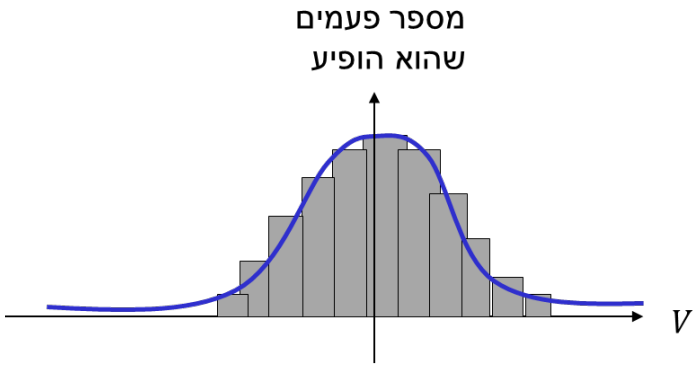
אם אנחנו עובדים בתדר מאוד גבוה ומתח שמשתנה כל מילי-שניה אבל דוגמים את המתח כל שניה אז לא נראה תדרים מאוד מהירים. תדרים מאוד איטיים שיוצאים מהחלון אנחנו גם לא נראה. תכונות אלו מיוצגות ע"י הפילטר.

כבל קואקסיאלי מאופיין ע"י אימפדנס אשר מסומן ב-$Z = R$. המשמעות היא שאם נחבר נגד מצד שמאל של הכבל, שום דבר לא יחזור, האימפדנס אומר לנו איזה נגד אנחנו צריכים לשים בקצה על מנת שלא תהיה החזרה של הגל.

אפשר להסתכל על הכבל כעל גוף שחור חד ממדי עם שני חורים. כמו בגוף שחור במקרה המתואר גל שיוצא נוצר בפנים ע"י הטמפרטורה. אנחנו שואלים מה נראה על המסך?

יש רק נגד וטמפרטורה, אין מקור זרם או מתח.

בסקופ אנחנו מודדים את המתח שנופל על הנגד. הסקופ הוא אידאלי ולא מושך זרם. התפלגות המתחים, כלומר כמות הפעמים שכל מתח הופיע, תיראה כך:



נסמן:
ν = תדר בהרץ = 1 חלקי זמן מחזור.
ω = תדר זוויתי, תדר ברדיאן לשניה.
כאשר $\omega = 2\pi\nu$. בנוסף, מתקיים $\langle V \rangle = 0,\ \langle V^2 \rangle \neq 0$
נזכר בנוסחאות להספק, מתח וזרם על נגד באופן כללי:

$$P = I^2 R, \quad I = \frac{V}{R}, \quad V = R \cdot I \tag{1}$$

בתוך הכבל יש שדות חשמליים ומגנטיים. הם דוחפים את האלקטרונים בכבל קדימה ואחורה ויוצרים מתח המשתנה בזמן בין הקצוות של הגיד הפנימי של הכבל. נחשוב על הגיד הפנימי של הכבל כבטרייה שמחליפה את הקיטוב שלה ואת ערכי המתח שלה באופן אקראי. אם יש מתח בין צד אחד של הכבל לצד שני אז זורם זרם דרך שני הנגדים והוא שווה ל:

$$I = \frac{V}{2R} \tag{2}$$

וההספק שנופל על הנגד הימני הוא:

$$P = I^2R = \frac{V^2}{4R^2}R = \frac{V^2}{4R} \tag{3}$$

אנחנו רוצים לחשב את ההספק שנופל על אחד הנגדים: נדמיין את הכבל כגוף שחור חד ממדי. האנרגיה הממוצעת של אופן תנודה נתון ע"י:

$$u = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{\tau}} - 1} \tag{4}$$

ביטוי זה נובע מהעובדה שאם הכבל היה סגור (כמו קופסא שחורה חד מימדית) אז היו לנו כל מיני תדרים $\omega(k)$ והסיכוי לקבל את האנרגיה $\hbar\omega(k)\cdot s$ בתדר $\omega(k)$ נתון ע"י:

$$P(s) = \frac{e^{-\beta\hbar\omega(k)\cdot s}}{Z} \tag{5}$$

ואז מחשבים את האנרגיה הממוצעת כמו בשעורים הקודמים. נשתמש בכלל אצבע לחישוב יחידות ונראה שעבור תדרים בהם סקופים עובדים וטמפרטורת חדר מתקיים:

$$\hbar \cdot 20GHz = k_B \cdot 1K \Rightarrow k_BT \gg \hbar\omega \tag{6}$$

ולכן נוכל לקרב את האנרגיה ע"י:

$$u = \frac{\hbar\omega}{1 + \frac{\hbar\omega}{k_BT} - 1} = k_BT = \tau \tag{7}$$

וקיבלנו שהאנרגיה הממוצעת של אופן תנודה אין תלות בתדר, לכל התדרים (בתחום האלקטרוניקה) יש אותה אנרגיה ממוצעת. מהירות האור בכבל קואקסיאלי קצת יותר קטנה ממהירות האור בריק:

$$c' = \frac{2}{3}c \tag{8}$$

יחס הנפיצה בכבל הינו: $\omega = c'k$.
בשונה מהקופסא, אין קירות בקצוות הכבל כלומר אין לנו תנאי שפה, ואנחנו צריכים תנאי שפה על מנת לפתור את משוואת הגלים. יש כמה אפשרויות לתנאי שפה איתם אנו יודעים להתמודד בקלות: הגלים מתאפסים בקצוות, הנגזרות מתאפסות בקצוות או תנאי שפה מחזוריים. תרמודינמיקה לא תלויה בתנאי שפה. מאחר שאנחנו יודעים כי הגלים לא מתאפסים בקצוות נבחר במקרה זה בתנאי שפה מחזוריים ונקבל:

$$k = \frac{2\pi}{L}n, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{9}$$

הצעד במרחב התדר

$$\delta\nu = \frac{1}{2\pi}\delta\omega = \frac{1}{2\pi}c'\delta k = \frac{c'}{L} \tag{10}$$

אם יש פילטר ברוחב $\Delta\nu$ אז מספר התדרים שמגיע לאוסילוסקופ הוא: $\frac{\Delta\nu}{\delta\nu} = \Delta\nu\frac{L}{c'}$.

נישאל מה היא האנרגיה בתחום התדרים $\Delta\nu$? ראינו האנרגיה לכל אופן בכל תדר היא k_BT, עלינו להכפיל את זה במספר התדרים שהפילטר מעביר שהוא $\frac{L}{c'}\Delta\nu$. גם צריך להכפיל פי 2 המגיע מהקיטובים שיכול להיות לשדה החשמלי בכל תדר. לכן האנרגיה בתחום התדרים:

$$\hat{u} = 2k_BT\frac{L}{c'}\Delta\nu \tag{11}$$

כדי לחשב את ההספק שיוצא מהכבל לוקחים את האנרגיה שבפנים, ומחלקים בזמן שלוקח לכבל להתרוקן מהאנרגיה הזאת (הוא מתמלא מחדש בגלל הטמפרטורה) הזמן הוא אורך הכבל מחולק במהירות האור. נקבל כי ההספק שנופל על הנגד הימני הינו:

$$\langle P\rangle = \frac{\hat{u}}{2\frac{L}{c'}} = \frac{2k_BT\frac{L}{c'}\Delta\nu}{2\frac{L}{c'}} = k_BT\Delta\nu \tag{12}$$

אנחנו מחלקים פי 2 כי חצי מהאנרגיה יוצאת דרך הפתח הימני וחצי דרך השמאלי ואנחנו מחפשים את ההספק על הנגד הימני ו-$\frac{L}{c'}$ הוא הזמן שלוקח לעמודה לצאת מהכבל. ההספק הוא ממוצע כי אנחנו משתמשים באנרגיה הממוצעת לכל אופן תנודה. ראינו כי:

$$\langle P\rangle = \frac{\langle V^2\rangle}{4R} \Rightarrow \langle V^2\rangle = 4R\langle P\rangle = 4Rk_BT\Delta\nu \tag{13}$$

לכן אנחנו רואים כי אנחנו יכולים למדוד את הטמפרטורה ע"י רעש. אם אנחנו רוצים למדוד טמפרטורה במעגל שאנחנו עובדים בו בלי להוסיף רכיבים למעגל, אנחנו יכולים להרכיב את המערכת, למדוד את הרעש ומתוך זה להסיק את הטמפרטורה.

זה נקרא רעש ג'ונסון.

עוד נקודה מעניינת היא שאורך הכבל נעלם מהתוצאה הסופית. זה אומר שלא באמת צריך אותו. הוא רק עוזר לנו לחשוב. האוסילוסקופ בעצם מודד את הרעש של נגד בטמפרטורה T.

פוטנציאל כימי:

אנחנו יכולים להסתכל על גוף שחור כעל בעיית מדפים של תדרים כאשר בכל מדף כמות האנרגיה אקראית, והאנרגיה מגיע בחבילות בדידות. השם של כל מדף כזה הוא $\vec{k}$ ועל כל מדף יש רק אנרגיות בדידות $s\cdot\hbar\omega\left(\vec{k}\right)$ כאשר לא הגבלנו את הגודל של s- על מדף מסוים. לכל אנרגיה בדידה כזאת יש סיכוי הנקבע ע"י פקטור בולצמן. הסיכוי לאנרגיה $s\,\hbar\omega\left(\vec{k}\right)$ הוא:

$$P(s) = \frac{e^{-\beta\hbar\omega\left(\vec{k}\right)s}}{Z} \tag{14}$$

ואין מגבלה על s. בזכות זה (צבר קנוני) הצלחנו לעשות את החישוב עד הסוף.

נזכר בבעיה של כדורים על מדפים: היו לנו מדפים שרצינו למקם עליהם כדורים, גיבס אמר שאנחנו צרכים לחשוב על הכדורים כזהים. אבל מה שקורה במדף אחד משפיע על מדף אחר ולא ניתן לדון בכל מדף בנפרד. רק אם לא ייהיו 2 כדורים או יותר באותו מדף (טמפרטורות גבוהות) אפשר להסתדר.

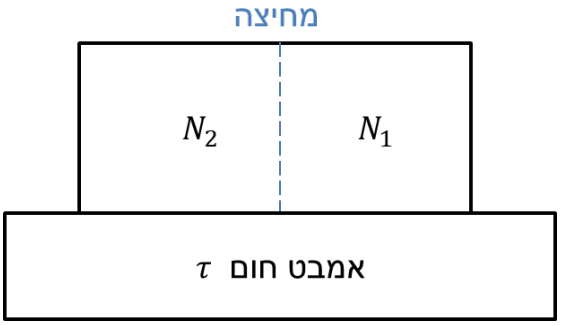
איך הסתדרנו עם פוטונים? במקרה של פוטונים אנחנו לא מגבילים את s (מספר הפוטונים על מדף). אם יש s מסוים במדף מסוים עדיין יכול להיות כל s בכל מדף אחר. זה איפשר לנו לדון בכל מדף בנפרד, לחשב את האנרגיה הממוצעת על המדף, ואז לסכם על כל המדפים.

עכשיו, באותו אופן אנחנו רוצים להסתכל על הבעיה של הכדורים. נרצה לאפשר אינסוף כדורים. אם יש לנו אינסוף כדורים בבעיה זה הופך את המדפים בלתי תלויים אחד בשני, כי התלות של המדפים אחד בשני בבעיה הסופית הוא בגלל שאם שמתי כדור במדף מסוים יש לי כדור אחד פחות שיכול להיות במדף אחר וזה משפיע על המדף האחר. לכן, אם יש לנו אינסוף כדורים בבעיה אז המדפים בלתי תלויים אחד בשני ונוכל לשאול מה הסיכוי שיהיו במדף אחד כדור אחד, שני כדורים וכ'ו..

עשינו כבר משהו דומה כשעברנו מצבר מיקרו-קנוני לצבר הקנוני. בצבר הקנוני ויתרנו על הדרישה שהאנרגיה תהיה נתונה ואמרנו שהאנרגיה יכולה לקבל כל ערך אבל הטמפ' קבועה. לרעיון הזה יש מחיר והוא שצריך לאמץ את הקשר בין אנרגיה ממוצעת לאנרגיה תרמודינמית $\langle\varepsilon\rangle = u$.

עכשיו נרצה לא להגביל את מספר החלקיקים (כמו עם פוטונים). איך נעשה זאת? נגדיר גודל מקביל לטמפרטורה, כך שמספר החלקיקים יהפוך להיות משתנה סטטיסטי מ-0 עד אינסוף ואז נוכל לעבוד רמה-רמה בנפרד. בסוף נדרוש שמספר החלקיקים הממוצע (הסטטיסטי) - $\langle N\rangle$ יהיה זהה למספר החלקיקים שהכנסתי לגז כפי שמופיע בתרמודינמיקה $\langle N\rangle = N$. פעולה זאת תשחרר אותנו מהמגבלה של התלות בין הרמות.

נסתכל על המערכת:



המחיצה מאפשרת לחלקיקים לעבור דרכה.
מתקיים:

$$F_{total} = F_1 + F_2 = u_1 + u_2 - \tau\left(\sigma_1 + \sigma_2\right) \tag{15}$$

נחזיק את נפח כל קופסא קבוע. בנוסף, חלקיקים יכולים לעבור בין הצדדים של המחיצה אבל לא יכולים לצאת מהקופסא ולכן:

$$dN_1 = -dN_2 \tag{16}$$

בשיווי משקל ראינו כי F_{total} מינימאלי. המערכת תבחר את יחס מספר החלקיקים כך שאם אנחנו משנים קצת את N_1, F לא משתנה. כלומר:

$$dF = 0 \tag{17}$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial N_1}\right)_{\tau,V} dN_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial N_2}\right)_{\tau,V} \overbrace{dN_2}^{=-dN_1} = dN_1\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial N_1}\right)_{\tau,V} - \left(\frac{\partial F_2}{\partial N_2}\right)_{\tau,V}\right] \tag{18}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial F_1}{\partial N_1}\right)_{\tau,V} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial N_2}\right)_{\tau,V} \tag{19}$$

קיבלנו כי במצב שיווי משקל הגדלים הנ"ל מתאזנים.
נגדיר (שוב):

$$\mu\left(\tau,V,N\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{\tau,V} \tag{20}$$

בגלל ש-N משתנה בדיד. ההגדרה הזהירה יותר היא:

$$\mu = \frac{F\left(\tau,V,N+1\right) - F\left(\tau,V,N\right)}{1} \tag{21}$$

הגדרנו את μ (שוב) כך ש-μ זה שינוי האנרגיה החופשית ע"י הוספת חלקיק בודד.
ראינו בעבר כי:

$$du = \tau d\sigma - PdV + \mu dN \Rightarrow \mu = \left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\sigma,V} \tag{22}$$

נראה כי שתי ההגדרות שקולות:

$$F = u - \tau\sigma = F\left(\tau,V,N\right) \Rightarrow dF = du - \tau d\sigma - \sigma d\tau \tag{23}$$

נציב את שימור האנרגיה בנגזרת ונקבל:

$$dF = \tau d\sigma - PdV + \mu dN - \tau d\sigma - \sigma d\tau \Rightarrow dF = -PdV + \mu dN - \sigma d\tau \tag{24}$$

$$\Rightarrow \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,\tau} \tag{25}$$

בהצגת האנטרופיה $\sigma\left(u\left(\tau,V,N\right),V,N\right)$ מקבלים משימור אנרגיה גם:

$$\mu = \tau \left(\frac{\partial \sigma}{\partial N} \right)_{u,V} \tag{26}$$

סה"כ קיבלנו כי:

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{\tau,V}, \quad \mu = -\tau \left(\frac{\partial \sigma}{\partial N} \right)_{u,V}, \quad \mu = \left(\frac{\partial u}{\partial N} \right)_{\sigma,V} \tag{27}$$

<u>דוגמא: גז אידאלי עם התיקון של גיבס:</u>
ראינו כי בטמפ' גבוהות שהוגדרו בעבר:

$$Z = \frac{(Z_{3D,N=1})^N}{N!} \tag{28}$$

כאשר: $n_1 = \frac{1}{V}$, $n_Q = \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$, $Z_{3D,N=1} = \frac{n_Q}{n_1}$.
לכן נקבל:

$$F = -\tau \ln Z = -\tau \left[N \ln Z_{3D,N=1} - \ln N! \right] \tag{29}$$

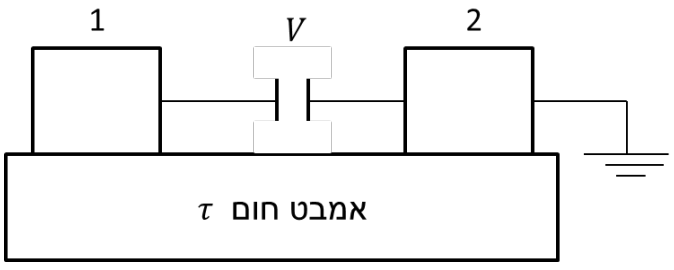
עפ"י קירוב סטרלינג נקבל:

$$F = -\tau \left[N \ln Z_{3D,N=1} - N \ln N + N \right] \tag{30}$$

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{\tau,V} = -\tau \left[\ln Z_{3D,N=1} - \ln N \right] = \tau \ln \left(\frac{N}{Z_{3D,N=1}} \right) = \tau \ln \left(N \frac{n_1}{n_Q} \right) \tag{31}$$

$$\Rightarrow \mu = \tau \ln \left(\frac{n}{n_Q} \right), \quad n = \frac{N}{V} \tag{32}$$

כעת נסתכל לשם האימון על המערכת בציור כשבכל קופסה יש אלקטרונים:



הסוללה לוקחת אלקטרון ומעבירה אותו לצד השני.
מתקיים:

$$u_1^{total} = u_1^{int} + qVN_1 \tag{33}$$

כאשר q = מטען של חלקיק. int=internal.
צד 2 מוארק ולכן:

$$u_2^{total} = u_2^{int} \tag{34}$$

ובנוסף:

$$F_1^{total} = F_1^{int} + qVN_1 \tag{35}$$

$$F_2^{total} = F_2^{int} \tag{36}$$

חלקיקים יכולים לעבור בין הצדדים אבל לא לצאת מהמערכת ולכן: $dN_1 = -dN_2$
בש"מ אנחנו יודעים ש-F מקבלת מינימום, כלומר:

$$dF^{total} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_1^{int}}{\partial N_1} + qV = \frac{\partial F_2}{\partial N_2} \tag{37}$$

בחשמל ראינו ש-$\frac{q}{V} = C$ כאשר C הוא הקיבול. נרחיב את הקשר הזה למקרה שבו אנחנו צמודים לאמבט חום ונקבל:

$$\mu_1 + qV = \mu_2 \Rightarrow qV = \mu_2 - \mu_1 \tag{38}$$

אם יש לנו שני חומרים שונים (שתי מתכות), יכול להיווצר מתח ביניהם רק בגלל הבדלי פוטנציאל כימי, אפילו אם אנחנו לא טוענים אף צד במטען עודף. אם נחבר את המתכות בחוט חשמל, מטען יעבור מאחת לשנייה עד אשר הפוטנציאל הכימי יתאזן. במציאות לאחר מעבר מטען יתפתח שדה חשמלי בעולם. כדי להעביר מטען מצד לצד הוא יצטרך להתגבר על השדה החשמלי. במקרה כזה

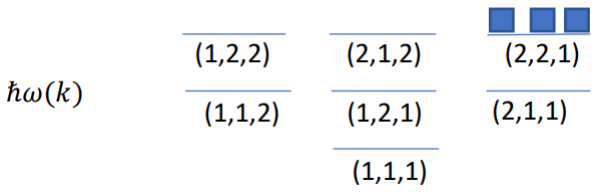
$$qV = q\phi + \mu_2 - \mu_1$$

כאשר

$$\phi = -\int \mathbf{E} d\mathbf{l} = \frac{q}{C}$$

הרצאה 16 - הצבר הגרנד-קנוני

פוטנציאל כימי:
קרינת גוף שחור נתנה לנו רעיון - הסתכלנו על מדפים נפרדים כאשר לכל מדף נתנו שם לפי האופן של הגל שהוא מייצג $\vec{k}$, גובה המדף נקבע ע"י האנרגיה $\hbar\omega(k)$, בכל מדף שמנו משתנה s רץ מ-0 עד אינסוף. אפשר בצורה איורית לחשוב על זה כאילו שמנו s פוטונים על כל מדף כש-s רץ מאפס עד אין סוף:



הגענו לאנרגיה ממוצעת עבור מדף $\vec{k}$:

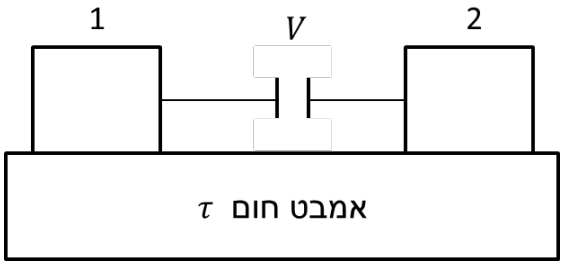
$$\widetilde{u}_{\vec{k}} = \frac{\hbar\omega\left(\vec{k}\right)}{e^{\hbar\omega\left(\vec{k}\right)}+1} \tag{1}$$

ואז סיכמנו על כל המדפים. מה שנתן לנו את היכולת לסכם הייתה ההנחה שמה שקורה במדף אחד בלתי תלוי במדף אחר שכן מספר הפוטונים במדף אחד לא תלוי במספר הפוטונים במדף אחר. ראינו שאם מספר החלקיקים אין סופי אז אנחנו יכולים לבצע את החישובים בקלות. אנחנו מחפשים גודל שיעזור לנו להפוך את מספר החלקיקים למשתנה סטטיסטי כמו שטמפרטורה הפכה את האנרגיה למשתנה סטטיסטי. המקביל לטמפרטורה בהקשר של מספר חלקיקים הוא הפוטנציאל הכימי.

ראינו כמה הגדרות שקולות לפוטנציאל כימי:

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{\tau,V}, \quad \mu = \left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\sigma,V}, \quad \mu = -\tau\left(\frac{\partial \sigma}{\partial N}\right)_{V,u} \tag{2}$$

לאחר מכן הסתכלנו על הדוגמא של המערכת הבאה:

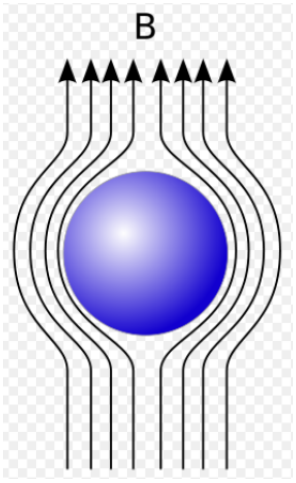


במערכת זו יש לנו אמבט חום אשר מצומד ל-2 מתכות (במתכות אלקטרונים יכולים לנוע, במוליכי חשמל אנחנו מתייחסים לאלקטרונים כמו לגז).
מצאנו כי:

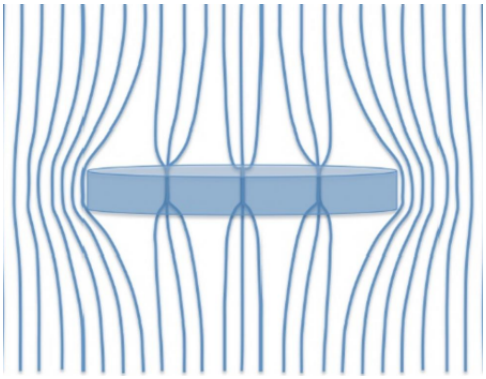
$$\mu_2 - \mu_1 = qV \tag{3}$$

ומכך אנחנו למדים שאנחנו יכולים לשלוט בפוטנציאל הכימי למשל של מתכות.

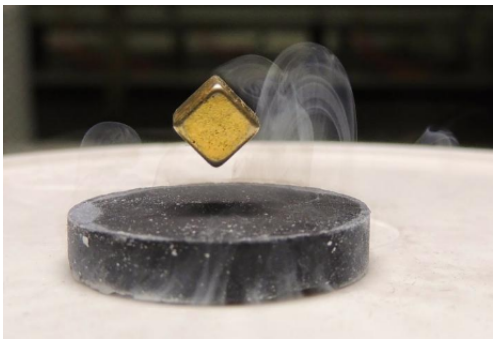
<u>דוגמא נוספת:</u>
נניח שיש לנו שדה מגנטי לא אחיד במרחב. לוקחים מוליך על ומפעילים עליו שדה מגנטי. מוליכי על מאוד שונאים שדות מגנטיים ולכן המוליך ידחה את השדה המגנטי. אם המוליך קטן אז השדה המגנטי יעבור מ"הצדדים" של המוליך בצורה הבאה:



אבל אם המוליך גדול אז זה קשה ל"כופף" את השדה המגנטי בצורה כזאת. במקרה זה מה שיקרה הוא שהשדה יעבור דרך המוליך אבל יהיו לנו אזורים שבהם יהיה שדה מגנטי גבוה, ואזורים בהם יהיה שדה מגנטי נמוך, כפי שניתן לתאר ע"י האיור הבא:



יש ניסויים אשר מראים מוליך על "צף" על פני שדה מגנטי כפי שניתן לראות בתמונה הבאה:



זה מתאפשר בזכות קווי השדה ש"מתכופפים" מסביב למוליך.

אנחנו שואלים איך אנחנו יכולים לדעת שהתמונה השנייה נכונה? הרי אנחנו לא יכולים לראות את השדה המגנטי ולכן איך אנחנו יכולים לדעת האם באמת יש אזורים בהם יש פחות שדה מגנטי ואזורים בהם יש יותר שדה מגנטי?

למוליך על יש טמפרטורה קריטית T_c כך שעבור $T > T_c$ החומר אינו מוליך על והשדה דרכו אחיד ועבור $T < T_c$ החומר מוליך על והשדה עובר דרכו בצורת וורטקסים. מפזרים אבקת ברזל מעל המוליך.

בשלב השני אנחנו מורידים את הטמפרטורה של המוליך עד $T < T_c$ ואז השדה מתרכז כמו בציור השני.

האופן שבו אנחנו נוכל לראות את השוני בשדה הוא ע"י כך שננער את המערכת של מוליך העל והחלקיקים. אם אנחנו נתחיל לראות אזורים בהם יש יותר חלקיקים על פני אזורים אחרים אנחנו נדע כי אכן יש אזורים בהם יש יותר שדה מגנטי. אנחנו נתייחס לחלקיקי אבקת הברזל כגז אידאלי.

מכיוון שאבקת הברזל זה חלקיקים מגנטיים יש להם 2 אפשרויות (כאשר הם תחת שדה מגנטי): חלקיקים עם מומנט כלפי מעלה, וחלקיקים עם מומנט כלפי מטה. לכן נקבל:

$$F = F\left(\tau, N, V, x = N_{\uparrow}/N_{\downarrow}\right) \tag{4}$$

בשווי משקל x יהיה כזה שהאנרגיה החופשית תהיה מינימאלית, במקרה שלנו זה יקרה כשהפוטנציאלים הכימיים של שני סוגי החלקיקים יהיו זהים.

ראינו מגז אידאלי שללא שדה מתקיים:

$$\mu_{\uparrow}^{int} = \tau \ln\left(\frac{n_{\uparrow}}{n_Q}\right) \tag{5}$$

$$\mu_{\downarrow}^{int} = \tau \ln\left(\frac{n_{\downarrow}}{n_Q}\right) \tag{6}$$

כאשר $n_{\uparrow},\ n_{\downarrow}$ זה צפיפות החלקיקים עם מומנט כלפי מטה/ מעלה בהתאמה ליחידת שטח.

כעת אנחנו מדליקים את השדה. זה משתנה זה האנרגיה שלהם. נזכר כי ללא שדה $F = u(\tau,V,N) - \tau\sigma(\tau,V,N)$, וכי $U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$ (כאשר m = מומנט מגנטי של חלקיק בודד ו U אנרגיה של מומנט בודד) עם הוספת השדה המגנטי האנרגיה משתנה. האנטרופיה לא תלויה באנרגיה אלא בטמפרטורה במקרה הקנוני, ולכן הביטוי לאנטרופיה לא משתנה.

ונקבל כי:

$$F_{\uparrow}^{B\neq 0} = F^{B=0} - mBN_{\uparrow} \tag{7}$$

$$F_{\downarrow}^{B\neq 0} = F^{B=0} + mBN_{\downarrow} \tag{8}$$

לכן נקבל:

$$\mu_{\uparrow}^{total} = \tau \ln\left(\frac{n_{\uparrow}}{n_Q}\right) - mB = \mu_{\uparrow}^{int} - mB \tag{9}$$

$$\mu_{\downarrow}^{total} = \tau \ln\left(\frac{n_{\downarrow}}{n_Q}\right) + mB = \mu_{\downarrow}^{int} + mB \tag{10}$$

במקרה שלנו חלקיקים בעלי מומנט מטה יכולים לצאת וחלקיקים בעלי מומנט מעלה יכולים להיכנס לאזורים בעלי שדה גבוה עד אשר בש"מ נקבל שהפוטנציאל הכימי של החלקיקים מעלה ומטה משתווה. כלומר, בש"מ נקבל:

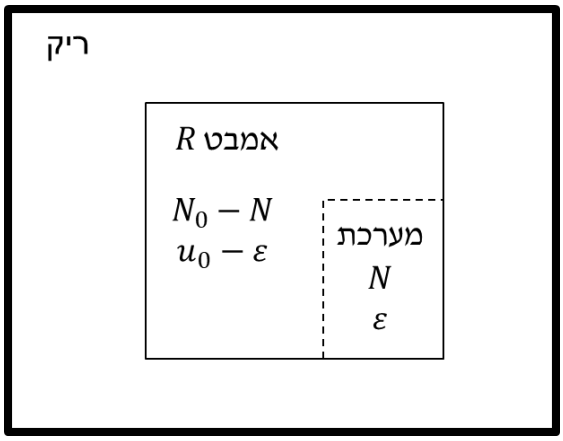
$$\mu_{\uparrow}^{total} = \mu_{\downarrow}^{total} \Rightarrow \tau \ln\left(\frac{n_{\uparrow}}{n_Q}\right) - mB = \tau \ln\left(\frac{n_{\downarrow}}{n_Q}\right) + mB \Rightarrow \tau \ln\left(\frac{n_{\uparrow}}{n_{\downarrow}}\right) = 2mB \tag{11}$$

$$\Rightarrow \frac{n_{\uparrow}}{n_{\downarrow}} = e^{\frac{2mB}{\tau}} \tag{12}$$

באיזור ללא שדה יש שוויון צפיפויות ואין מגנוט. באיזור עם שדה יש יותר מעלה ממטה והאזור ממוגנט. במקרה כזה המומנטים אוהבים להדבק אחד לשני ורואים שרשראות של חלקיקים.

הצבר הגרנד- קנוני:

נסתכל על המקרה הבא:



יש לנו אמבט כפול. אנרגיה וחלקיקים יכולים לעבור בין האמבט למערכת אבל לא יכולים לצאת החוצה לגמרי, סך כל האנרגיה הינה u_0 וסך כל החלקיקים הוא N_0.

אנחנו רוצים לדעת בכמה אופנים אפשר למצוא את המערכת במצב ספציפי?

תזכורת: מצב ספציפי במקרה של מומנטים זה המומנט הראשון כלפי מטה והשני כלפי מעלה וכן הלאה.

מספר האופנים למצוא המערכת במצב מאוד ספציפי אם אנרגיה ε ו-N חלקיקים הוא מספר המצבים שיש לאמבט עם אנרגיה $u_0-\varepsilon$ (כאשר ε זו האנרגיה של המערכת) ועם N_0-N חלקיקים (N הינו מספר החלקיקים במערכת). מספר האופנים כפי שמוגדר לעיל הינו:

$$\Omega\left(N_0-N,u_0-\varepsilon\right)=g_R\left(N_0-N,u_0-\varepsilon\right)du \tag{13}$$

אם נסמן ב-$P_s\left(N,\varepsilon\right)$ (s=state) את הסיכוי של המערכת להיות במצב s עם N חלקיקים ו-ε אנרגיה נקבל:

$$\frac{P_s\left(N_1,\varepsilon_1\right)}{P_s\left(N_2,\varepsilon_2\right)}=\frac{g_R\left(N_0-N_1,u_0-\varepsilon_1\right)}{g_R\left(N_0-N_2,u_0-\varepsilon_2\right)} \tag{14}$$

נזכר כי הגדרנו $\sigma=\ln g$ ולכן נקבל $g\left(N,u\right)=e^{\sigma(N,u)}$.
נפתח את $\sigma\left(N_0-N,u_0-\varepsilon\right)$ לטור טיילור בשני משתנים סביב $\left(N_0,u_0\right)$ ונקבל:

$$\sigma\left(N_0-N,u_0-\varepsilon\right)=\sigma\left(N_0,\ u_0\right)-N\overbrace{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial N}\right)_{N_0,u_0}}^{=-\frac{\mu}{\tau}}-\varepsilon\overbrace{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)_{N_0,u_0}}^{=\frac{1}{\tau}}=\sigma\left(N_0,u_0\right)+\frac{N\mu}{\tau}-\frac{\varepsilon}{\tau} \tag{15}$$

נציב את זה ב-g ואז ב-(18) ונקבל:

$$\frac{P_s\left(N_1,\varepsilon_1\right)}{P_s\left(N_2,\varepsilon_2\right)}=\frac{e^{\sigma(N_0-N_1,u_0-\varepsilon_1)}}{e^{\sigma(N_0-N_2,u_0-\varepsilon_2)}}=\frac{\cancel{e^{\sigma(N_0,u_0)}}e^{\frac{\mu}{\tau}N_1-\frac{\varepsilon_1}{\tau}}}{\cancel{e^{\sigma(N_0,u_0)}}e^{\frac{\mu}{\tau}N_2-\frac{\varepsilon_2}{\tau}}}=\frac{e^{\frac{1}{\tau}(\mu N_1-\varepsilon_1)}}{e^{\frac{1}{\tau}(\mu N_2-\varepsilon_2)}} \tag{16}$$

לכן אנחנו מסיקים כי:

$$P_s\left(N,\varepsilon\right)=\frac{e^{\frac{1}{\tau}(\mu N-\varepsilon)}}{\mathcal{Z}} \tag{17}$$

כאשר $\mathcal{Z}$ הינה פונקצית נרמול חדשה אשר מקיימת:

$$\mathcal{Z}=\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s(N)}e^{\frac{1}{\tau}(\mu N-\varepsilon_s)} \tag{18}$$

כאשר $s\left(N\right)$ הינו מצב מערכת עם N חלקיקים. $\mathcal{Z}$ ניראת מפחידה. היא דווקא קלה לחישוב בגלל שמספר החלקיקים לא קבוע.

הצבר הזה נקרא הצבר הגרנד-קנוני. נזכיר כי בצבר המיקרו קנוני מדובר על מערכות מבודדות, בצבר הקנוני אנחנו עוסקים במערכות בעלות טמפרטורה קבועה, והאנרגיה משתנה סטטיסטי. בצבר הגרנד קנוני הטמפרטורה ופוטנציאל הכימי קבועים, האנרגיה ומספר החלקיקים משתנים סטטיסטים. הצבר הגרנד קנוני פופולרי במצב מוצק.
עפ"י הגדרה:

$$\overline{N}=\sum_{N}\sum_{s(N)}\frac{Ne^{\frac{1}{\tau}(\mu N-\varepsilon_s)}}{\mathcal{Z}} \tag{19}$$

הערה: קיטל משתמש בסימון $\sum_{N}\sum_{s(N)}=\sum_{ASN}$ אבל אנחנו לא נשתמש בסימון זה בקורס.

באופן דומה לכך שבצבר הקנוני הצלחנו ע"י פונקצית החלוקה Z להגיע לכל הגדלים המעניינים, בצבר הגרנד-קנוני נוכל למצוא את כל הגדלים ע"י שימוש ב-$\mathcal{Z}$ למשל:

$$\overline{N}=\tau\frac{\partial\ln\mathcal{Z}}{\partial\mu} \tag{20}$$

נוודא שזה נכון:

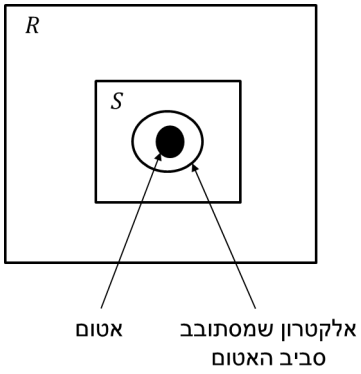
$$\tau\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu}=\tau\frac{1}{\mathcal{Z}}\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \mu}=\frac{\tau}{\mathcal{Z}}\sum_{N}\sum_{s(N)}\frac{\partial}{\partial \mu}e^{\frac{1}{\tau}(\mu N-\varepsilon_s)}=\frac{\tau}{\mathcal{Z}}\sum_{N}\sum_{s(N)}\frac{N}{\tau}e^{\frac{1}{\tau}(\mu N-\varepsilon_s)}=\sum_{N}\sum_{s(N)}N\frac{e^{\frac{1}{\tau}(\mu N-\varepsilon_s)}}{\mathcal{Z}}= \tag{21}$$
$$=\sum_{N}\sum_{s(N)}NP_s\left(N,\varepsilon_s\right)=\overline{N}$$

כעת נשאל את עצמנו מה זה אומר לגזור את $\ln \mathcal{Z}$ לפי $\beta=\frac{1}{\tau}$:

$$\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta}=\frac{1}{\mathcal{Z}}\sum_{N}\sum_{s(N)}\left(\mu N-\varepsilon_s\right)e^{\beta(\mu N-\varepsilon_s)}=\mu\overline{N}-\overline{\varepsilon} \tag{22}$$

$$\Rightarrow \overline{\varepsilon}=\mu\tau\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu}-\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta} \tag{23}$$

<u>תרגיל חימום:</u>
מוליך למחצה הוא חומר שאפריורית אין בו אלקטרונים שיכולים לזוז. סימום של מוליך למחצה זה כאשר לוקחים חומר אחר שברגע שדוחפים אותו לתוך המוליך למחצה האלקטרון עוזב את האטום המקורי.



באיור הנ"ל יש לנו אטום שסביבו מסתובב אלקטרון בעל מומנט מגנטי.
נסתכל על מערכת עם ערכי אנרגיה ε שונים, ומספר חלקיקים N:

מצב	ε	N
אלקטרון משתחרר, עוזב את המערכת	0	0
יש במערכת רק אלקטרון אחד עם מומנט כלפי מעלה	$-I$	1
יש במערכת רק אלקטרון אחד עם מומנט כלפי מטה	$-I$	1

כאשר סימנו ב-I את אנרגיית הקשר עבור מומנט כלפי מעלה/ מטה.
נשים לב שכאשר אלקטרון קשור האנרגיה שלו שלילית כי בשביל להתנתק הוא צריך אנרגיה ואחרי שהוא מתנתק האנרגיה היא 0.
נקבל:

$$\mathcal{Z}=\sum_{N}\sum_{S(N)}e^{\frac{1}{\tau}(\mu N-\varepsilon)}=1+e^{\frac{1}{\tau}(\mu+I)}+e^{\frac{1}{\tau}(\mu+I)} \tag{24}$$

מה הסיכוי שלא יהיה אלקטרון במערכת? כלומר, שהאלקטרון הצטרף למוליך למחצה.
תשובה:

$$P\left(0,0\right)=\frac{1}{\mathcal{Z}}=\frac{1}{1+2e^{\frac{1}{\tau}(\mu+I)}} \tag{25}$$

וקיבלנו כי הסיכוי הנ"ל תלוי באנרגית הקשר וב-μ. כאשר נזכור ש-μ = השינוי של האנרגיה החופשית בהוספת מטען למוליך למחצה.
נשים לב כי τ,μ אלה תכונות של האמבט שמקרה שלנו זה המוליך למחצה.

ניתן לראות כי כאשר τ קטן הסיכוי לשחרור האלקטרון קטן, וכאשר הטמפ' עולה אזי אלקטרונים משתחררים והמוליך למחצה מתפקד כמו מוליך.

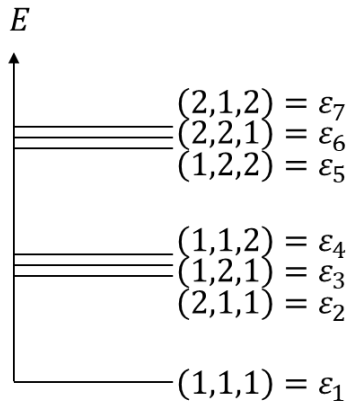
חלקיקים קוונטים בקופסא (מדפים ריבועיים):
ראינו כי האנרגיה מקיימת:

$$E = \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right) \tag{26}$$

אנחנו רוצים לחשב:

$$\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s(N)} e^{\frac{1}{\tau}(\mu N-\varepsilon)} = \underbrace{\dots}_{N=0} + \underbrace{\dots}_{N=1} + \underbrace{e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-\varepsilon_1-\varepsilon_1)} + e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-\varepsilon_1-\varepsilon_2)} + \dots + e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-\varepsilon_3-\varepsilon_3)}}_{N=2} + \dots \tag{27}$$

לכאורה אנו צריכים לעשות את החישוב פר מספר חלקיקים, למשל 2 בקופסא ואז לסכם על כל מספרי החלקיקים. אבל כמובן שכך רק סיבכנו ולא הרווחנו.



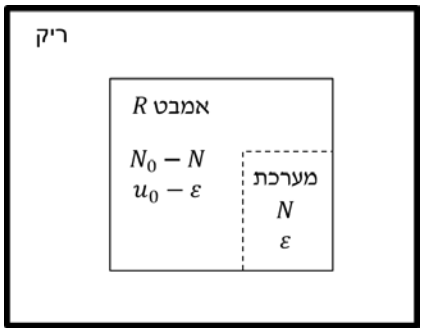
נסתכל על בעיה זו כך שכל רמת אנרגיה היא מדף שעליו יושב החלקיק. בציור יש הבדל קטן בין רמות 2, 3, 4 וגם בין 5, 6, 7 רק לשם ההדגשה אין הבדל באמת.

במקרה זה נקבל:

$$\mathcal{Z} = \underbrace{\dots}_{N=0} + \underbrace{\dots}_{N=1} + \underbrace{\overbrace{e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-2\varepsilon_1)}}^{\text{both particles, 2 shelf first the on}} + \overbrace{e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}}^{\text{on particles 2 and 1 shelfs}} + \dots + \overbrace{e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-\varepsilon_1-\varepsilon_5)}}^{\text{on particles 2 and 1 shelfs}}}_{N=2} + \dots =$$

$$= \overbrace{\left(1+e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_1)}+e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-2\varepsilon_1)}+\dots\right)}^{\varepsilon_1}\overbrace{\left(1+e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_2)}+e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-2\varepsilon_2)}+\dots\right)}^{\varepsilon_2}\overbrace{\left(1+e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_3)}+e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-2\varepsilon_3)}+\dots\right)}^{\varepsilon_3}$$

הצבר הגרנד- קנוני (תזכורת):
נסתכל על המערכת מהשיעור שעבר:



בשבוע שעבר קיבלנו שהסיכוי למצא המערכת במצב מאוד ספציפי s עם אנרגיה ε ומספר חלקיקים N הוא:

(1)
$$P_s(N,\varepsilon) = \frac{e^{\frac{1}{\tau}(N\mu-\varepsilon)}}{\mathcal{Z}}$$

כאשר $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\mu,\tau,V)$ זה פקטור נרמול. דהיינו, מישהו צריך להגיד לנו בדיוק באיזה רמה/מצב יושב כל חלקיק מתוך ה N חלקיקים, ו ε זה סכום האנרגיות של כל החלקיקים. כדי שהסיכוי יהיה מנורמל חייב להיות ש:

(2)
$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s(N)} e^{\frac{1}{\tau}(\mu N-\varepsilon)}$$

כאשר הסכום הפנימי רץ על כל המצבים האפשריים עם N חלקיקים. זה נקרא הסכום של גיבס.

לפי הגדרה:

(3)
$$\overline{N} = \frac{\sum\sum N e^{\frac{1}{\tau}(\mu N-\varepsilon)}}{\mathcal{Z}}$$

(4)
$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum\sum \varepsilon e^{\frac{1}{\tau}(\mu N-\varepsilon)}}{\mathcal{Z}}$$

ובשיעור שעבר קיבלנו:

(5)
$$\overline{N} = \tau\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu}$$

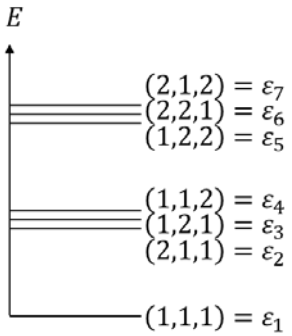
(6)
$$\bar{\varepsilon} = \left(\frac{\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu} - \frac{\partial}{\partial\beta}\right)\ln\mathcal{Z}$$

אנחנו יכולים לשלוט ב $\overline{N}$ ו $\bar{\varepsilon}$ ע״י שליטה ב τ ו μ למשל ע״י תנור/מקרר ומתח חשמלי.

חלקיק קוונטי בקופסא:
סיימנו את השיעור שעבר בדוגמא של חלקיק קוונטי בקופסא.
חלקיק בקופסא זה מקרה יותר פשוט מפוטונים כי יש רק סט אחד של מספרים דיסקרטיים.
כל חלקיק מאופיין ע״י שלשה $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ אשר קובעת את האנרגיה שיש לחלקיק עפ״י הקשר:

(7)
$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)$$

ואמרנו שיש רמות אנרגיה לכל חלקיק. ציר האנרגיה נראה כך:



הסתכלנו על בעיה זו כך שכל רמת אנרגיה היא מדף שעליו יושבים החלקיק. המדף בעל אנרגיה שנקבעת ע״י שם המדף. יש הרבה שמות עם אותה אנרגיה. ההפרדה בדיור בין רמות קרובות היא לצורך הבהרה פדגוגית.

במקרה זה נקבל:

(8)
$$\mathcal{Z} = \underbrace{\cdots}_{N=0} + \underbrace{\cdots}_{N=1} + \underbrace{\overbrace{e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-2\varepsilon_1)}}^{\substack{2\ particles,both\\ on\ the\ first\ shelf}} + \overbrace{e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}}^{\substack{2\ particles\ on\\ shelfs\ 1\ and\ 2}} + \cdots + \overbrace{e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-\varepsilon_1-\varepsilon_5)}}^{\substack{2\ particles\ on\\ shelfs\ 1\ and\ 5}} + \cdots}_{N=2}$$

בצבר הקנוני ניסינו לחשב את Z_N ואמרנו שזה שווה ל-$\frac{(Z_{3D,N=1})^N}{N!}$ (עם התיקון של גיבס) אבל גם ראינו כי התיקון הזה לא מדויק. לא הייתה לנו דרך להאריך עד כמה גרועה השגיאה. הגבלנו עצמנו לטמפרטורות גבוהות.

אם נסתכל על הסכום הנ״ל אנחנו רואים כי עבור $N = 2$ למשל אנחנו יכולים להוציא את $e^{2\mu/\tau}$ כגורם משותף ולקבל למעשה את אותו הסכום שקיבלנו בצבר הקנוני. לכאורה נשארנו עם אותה הבעיה.

לכן אנחנו ננסה למצוא דרך אחרת לכתוב את הסכום הנ״ל שאולי יהיה לנו יותר קל ונוח לחשב.

הרעיון הגיע מקרינת גוף שחור. בגוף שחור היו לנו מדפים באנרגיות שונות (שנבדלות אחת מהשניה ב-$\hbar\omega$), והלכנו לכל מדף ומילאנו אותה בפוטונים ללא הגבלה. גם במקרה של חלקיקים בקופסה אנחנו יכולים לנסות לחשב את $\mathcal{Z}$ רמה- רמה ע״י כך שנכתוב את הסכום הנ״ל עפ״י רמות:

(9)
$$\overbrace{\left(1 + e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_3)} + \cdots\right)}^{\varepsilon_3}\overbrace{\left(1 + e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_2)} + e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-2\varepsilon_2)} + \cdots\right)}^{\varepsilon_2}\overbrace{\left(1 + e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_1)} + e^{\frac{1}{\tau}(2\mu-2\varepsilon_1)} + \cdots\right)}^{\varepsilon_1}$$

כעת נראה שהמכפלה הנ״ל נותנת לנו את הסכום הרצוי (את $\mathcal{Z}$). נעשה זאת ע״י כך שנראה שלכל איבר בסכום הראשון יש מקבילה בסכום השני:

- במערכת עם אפס חלקיקים אין לנו אנרגיה ונקבל מהסכום הראשון את האיבר 1. במכפלה הנ״ל אנחנו רואים כי ניתן לקחת את ה-1-ים מכל המכפלות ולקבל 1.
- במערכת עם חלקיק אחד ברמה הראשונה יש לנו את האיבר $e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_1)}$ אשר מגיע מהמכפלה השניה ע״י לקיחת $e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_1)}$ מהגורם הראשון ו-1-ים מכל השאר.
- במערכת עם שני חלקיקים ברמות 1,2 נקבל את האיבר $e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_1)}e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_2)}$ בסכום. איבר זה מתקבל במכפלה ע״י לקיחת שני האיברים הרלוונטיים מהגורם הראשון והשני ומכל השאר 1-ים.
- וכן הלאה..

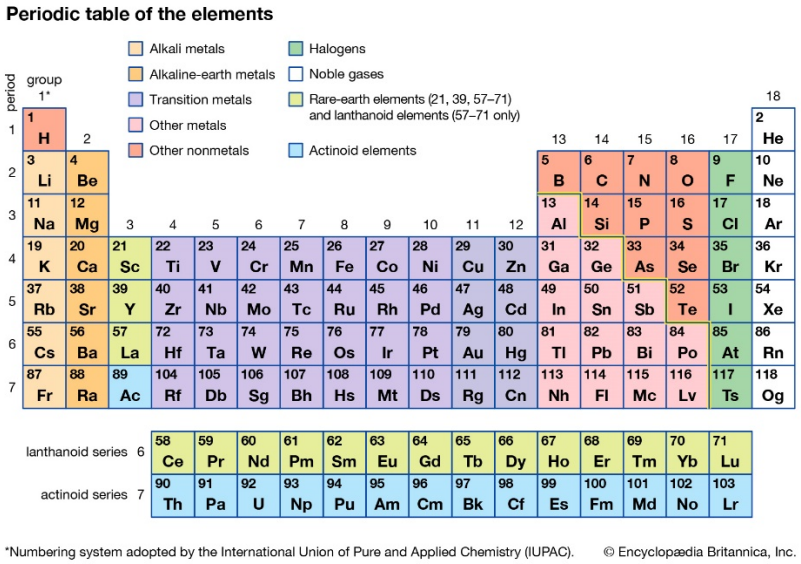
לכן סה״כ נקבל:

(10)
$$\mathcal{Z} = \prod_{\substack{i=level\\ name}} \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{1}{\tau}(\mu N - \varepsilon_i N)}$$

נשים לב כי אין מגבלת חלקיקים ברמה (או בכלל) וכמובן שאין מגבלת אנרגיה ברמה או בכלל.

עוד דבר שאנחנו צריכים לשם לב אליו הוא שהרמות נבדלות בשלשה (n_x, n_y, n_z). יכולות להיות לנו כמה רמות עם אותה אנרגיה אבל ערכי (n_x, n_y, n_z) שונים.

<u>אינטרמצו: אטום מימן:</u>
שרדינגר לקח את נוסחת אינשטיין-פלנק ואת הקשר של דה-ברולי ורשם משוואה גלים אחת שתקפה לכל פוטנציאל. על מנת לבדוק את הנוסחה שלו הוא הציב בתוכה את הפוטנציאל של אטום המימן וקיבל את רמות האנרגיה. באטום מימן הפוטנציאל נתון ע"י $V(r) = \frac{e^2}{r}$. שרדינגר פתר את משוואת שרדינגר עבור מקרה זה והוא קיבל רמות האנרגיה של אטום מימן המימן בדיוק מדהים. באטום מימן יש אלקטרון אחד ואם מחממים את אטום המימן אז האלקטרון יכול לגור בכל מיני רמות אנרגיה ולעבור ביניהן. כאשר החלקיק יורד באנרגיה בין רמות הוא פולט את האנרגיה שלו בצורת אור ונוצר ספקטרום של אור שאטום המימן יכול לפלוט, מתקבל אוסף דיסקרטי של צבעים. הצבעים מקימים את הנוסחה (רידברג ריטל):
$\frac{1}{\lambda} = Rz^2(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})$ (z מספר האטומי $R = 1.1 \times 10^7 m^{-1}$). הפתרון של שרדינגר לאטום המימן משחזר את הצבעים הנפלטים ממנו בניסויי בדיוק מדהים.
כאשר עשו את אותו הניסוי עם יסודות כימיים אחרים (כאלה שנמצאים בשורה שמתחת לאטום המימן בטבלה המחזורית) זה היה נראה שלאנרגיה שנפלטת במקרים אלה חסרה רמה. יש רמה אחת פחות מהאטום שמעל בטבלה המחזורית. כאילו שיש רמות שהאלקטרון לא יכול לרדת אליהם.



נסתכל על המקרה של ליתיום: בליתיום יש 3 אלקטרונים והיה נראה ששני אלקטרונים גרים באותה הרמה, והשלישי ברמה אחרת. זה נראה כאילו שיש רמה אחת ראשונה זהה לרמה במימן אבל היא "תפוסה" בליתיום ואלקטרון לא יכול לגור בה. רואים שהאלקטרון השלישי לא יכול נכנס לרמה הראשונה. בסודיום האלקטרון ה 11 לא יכול להיכנס לרמה הראשונה או השניה. וכן הלאה.

כאשר אנחנו יורים לווין מעל כדוה"א אנחנו יכולים לשים 3 לווינים באותו מסלול בלי בעיה, אז למה שתהיה בעיה לכמה אלקטרונים לגור באותה רמה? יותר מכך, יש לנו מקרים בהם אלקטרון אמור לאבד את האנרגיה שלו (למשל ע"י התנגשות של אטומים) והיינו מצפים שהוא ירד לרמה הראשונה. למה הוא לא יורד. למה האלקטרון השלישי נישאר ברמה גבוהה לעד?

על מנת לפתור את הבעיה הזו פאולי קבע את האיסור שלו. החוק אומר שפשוט אסור לשים שני אלקטרונים ברמה עם מספרים קוונטים זהים. לצורך העניין לאלקטרון מומנט מגנטי (מעלה מטה) ולכן בעצם מותר לשים שני אלקטרונים באותה רמה בתנאי שלאחד מומנט מגנטי מעלה ולשני מטה. לדרגת החופש שאחראית למומנט המגנטי קוראים ספין.

גם אם ניקח קופסא ונשים בה אלקטרון ברמה התחתונה וננסה בכוח אינסופי להוסיף אלקטרון לרמה זו, לא נצליח. אבל אנחנו לא יודעים להסביר למה זה נכון. אין לחוק הזה אי ודאות או חסם ניסיוני. זה חוק מוזר מאוד. אבל, החוק הזה מציל אותנו בהרבה בעיות בפיסיקה ומסביר הרבה תופעות שנלמד עליהם לאט לאט (ממצב מוצק עד אסטרופיסיקה). מכיוון שבפיסיקה השופט זה הניסוי אנחנו מאמינים שחוק האיסור של פאולי נכון.

יותר מכך, החלקיקים מתחלקים לשתי קבוצות: אלה שמקיימים את חוק האיסור ואלה שממש לא. ושתי הקבוצות האלה מתנהגות מאוד שונה. לאלו ש "ממש לא מקימים את חוק האיסור" מותר להיות אין סוף חלקיקים ברמה. עדיין לא נמצא דוגמה ניסיונית שבה זה לא נכון. למשל לא נמצאה דוגמא ניסיונית שברמה מותר להיות עד 3 חלקיקים. זה אפס ו 1, או, אפס עד אין סוף. אין באמצע.

נבהיר שכאשר אמרנו שיש אלקטרונים שלא יכולים להיות באותה רמה זה לא אומר שהם לא יכולים להיות באותה אנרגיה. יכולות להיות רמות שונות בעלות אותה אנרגיה (למשל הרמות $(1,2,3)$,$(3,1,2)$ הן שונות אבל בעלות אותה אנרגיה).

לחלקיקים שבהם יכול להיות מקסימום חלקיק אחד בכל רמה, כאשר נחשב את $\mathcal{Z}$ ניקח את הסכום $\sum_{N=0}^{1}$. לחלקיק אלו אנחנו קוראים <u>פרמיונים</u>. האלקטרון הוא פרמיון.

לחלקיקים שבהם אנחנו מאפשרים אינסוף חלקיקים בכל רמה, כלומר $\sum_{N=0}^{\infty}$ אנחנו קוראים <u>בוזונים</u>. <u>פוטונים</u> זה מקרה פרטי של בוזונים חסרי מסה. בהתחלה הכירו רק פוטונים עד שבוז ואיינשטיין כתבו מאמר ובו אמרו שצריכים להיות חלקיקים כמו פוטונים מבחינה סטטיסטית אבל בעלי מסה ולכן אנחנו קוראים לחלקיקים אלה בוזונים ואומרים שפוטונים הם מקרה פרטי שלהם.

נגדיר:

$$\mathcal{Z}_i = \sum_{N=0} e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_i)N} \tag{11}$$

כאשר $\mathcal{Z}_i$ זו פונקצית החלוקה עבור הרמה ה-i ואז נקבל:

$$\mathcal{Z} = \prod_i \mathcal{Z}_i \tag{12}$$

עבור פרמיונים נקבל:

$$\mathcal{Z}_i^F = 1 + e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_i)} \tag{13}$$

ועבור בוזונים נקבל:

$$\mathcal{Z}_i^B = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_i)N} = \frac{1}{1-e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_i)}} \tag{14}$$

כאשר את השוויון השני קיבלנו ע"י הנוסחה לסכום של סדרה הנדסית, אבל הוא נכון רק למקרה שבו $e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_i)} < 1 \Leftarrow \mu - \varepsilon_i < 0$ לכל i צריך להתקיים $\mu < \varepsilon_i$. בד"כ נקבע את רמות האנרגיה כך שהרמה הנמוכה ביותר תהיה 0 ואז μ יהיה שלילי.

מהו מספר החלקיקים הממוצע ברמה ה-i (ללא תלות במספר החלקיקים רמות האחרות)?
על מנת למצוא את התשובה, ראשית נחשב את הסיכוי שברמה ה-i יהיו N חלקיקים ולא אכפת לנו כמה חלקיקים יש ברמות האחרות:

$$P_i(N) = \frac{\overbrace{e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_i)N}}^{(1)} \overbrace{\sum_{M=0}^{\infty}\sum_{s\neq i(M)} e^{\frac{1}{\tau}(\mu M-\varepsilon_{s(M)})}}^{(2)}}{\mathcal{Z}} \tag{15}$$

כאשר $s \neq i$ מסמל את כל הרמות חוץ מ i. חישבנו את הביטוי הנ"ל ע"י כך ששמנו ברמה ה-i את מספר החלקיקים שרצינו - האיבר (1), והאיבר (2) זה האפשרויות לחלקיקים בשאר הרמות. (2) הוא למעשה $\mathcal{Z}$ כאילו שהרמה ה-i לא קיימת. נסמן: $\mathcal{Z}' = \mathcal{Z}_{without\ i}$. ניתן לקבל את הסיכוי הנ"ל ע"י:

$$P_i(N,\varepsilon) = \frac{e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_i)N} \cdot \mathcal{Z}'}{\mathcal{Z}} \tag{16}$$

כמו כן ראינו ש $\mathcal{Z}$ בנוי ממכפלה:

$$\mathcal{Z} = \prod_j \mathcal{Z}_j = \mathcal{Z}_i \cdot \prod_{j \neq i} \mathcal{Z}_j = \mathcal{Z}_i \cdot \mathcal{Z}' \tag{17}$$

ואז נקבל:

$$P_i(N) = \frac{e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_i)N} \cdot \mathcal{Z}'}{\mathcal{Z}_i \cdot \mathcal{Z}'} = \frac{e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_i)N}}{\mathcal{Z}_i} \tag{18}$$

וקיבלנו כי הסיכוי למצוא N חלקיקים ברמה ה-i לא קשור למספר החלקיקים ברמות האחרות. זאת כל החוכמה והיתרון בלעבוד רמה- רמה.

נסמן $\langle N \rangle_i$ = מספר חלקיקים בממוצע ברמה i. מתקיים:

$$\langle N \rangle_i = \sum_{N=0} \frac{N \cdot e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_i)N}}{\mathcal{Z}_i} \tag{19}$$

עבור פרמיונים נקבל:

$$\langle N \rangle_i^F = \sum_{N=0}^{1} \frac{N \cdot e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_i)N}}{\mathcal{Z}_i^F} = \frac{0 + e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_i)}}{1 + e^{\frac{1}{\tau}(\mu-\varepsilon_i)}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{\tau}(\varepsilon_i-\mu)} + 1} \tag{20}$$

וזה נקרא התפלגות פרמי- דיראק וההתפלגות אומרת כמה חלקיקים יש ברמה ספציפית i בהינתן הטמפרטורה והפוטנציאל הכימי של האמבט הכפול.

כעת נבצע את אותו חשבון עבור בוזונים:

נסמן $z = e^{\frac{\mu}{\tau}}$ כדי שנוכל לגזור לפי z ב τ קבוע (קיטל מסמן ב λ) ונקבל שמספר החלקיקים הממוצע ברמה ה i נתון ע"י:

$$\langle N \rangle_i^B = \frac{\sum_{N=0}^{\infty} N \cdot z^N e^{-\frac{\varepsilon_i N}{\tau}}}{\mathcal{Z}_i} \tag{21}$$

נרשום את $\mathcal{Z}_i$ באמצעות z:

$$\mathcal{Z}_i = \sum_{N=0}^{\infty} z^N e^{-\frac{\varepsilon_i N}{\tau}} = \frac{1}{1 - z e^{-\frac{\varepsilon_i}{\tau}}} \tag{22}$$

נראה כי:

$$\langle N \rangle_i^B = z \frac{\partial}{\partial z} \ln(\mathcal{Z}_i) \tag{23}$$

נסתכל על $\mathcal{Z}_i$ מצד שמאל של 22 ונקבל:

(24)
$$z\frac{\partial}{\partial z}\ln(\mathcal{Z}_i) = z\frac{\partial}{\partial z}\ln\left(\sum_{N=0}^{\infty} z^N e^{-\frac{\varepsilon_i N}{\tau}}\right) = \frac{z}{\sum_{N=0}^{\infty} z^N e^{-\frac{\varepsilon_i N}{\tau}}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{N=0}^{\infty} z^N e^{-\frac{\varepsilon_i N}{\tau}}\right)$$
$$= \frac{z}{\sum_{N=0}^{\infty} z^N e^{-\frac{\varepsilon_i N}{\tau}}}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left(z^N e^{-\frac{\varepsilon_i N}{\tau}}\right)$$
$$= \frac{z}{\sum_{N=0}^{\infty} z^N e^{-\frac{\varepsilon_i N}{\tau}}}\sum_{N=0}^{\infty} N z^{N-1} e^{-\frac{\varepsilon_i N}{\tau}} = \frac{\sum_{N=0}^{\infty} N z^N e^{-\frac{\varepsilon_i N}{\tau}}}{\sum_{N=0}^{\infty} z^N e^{-\frac{\varepsilon_i N}{\tau}}}$$
$$= \frac{\sum_{N=0}^{\infty} N z^N e^{-\frac{\varepsilon_i N}{\tau}}}{\mathcal{Z}_i}$$

ואכן קיבלנו את הביטוי ל-$\langle N\rangle_i^B$ כצפוי.

כעת נסתכל על צד ימין של (22) ונחשב:

(25)
$$\langle N\rangle_i^B = z\frac{\partial}{\partial z}\ln(\mathcal{Z}_i) = \mathrm{z}\frac{\partial}{\partial z}\ln\left(\frac{1}{1-ze^{-\frac{\varepsilon_i}{\tau}}}\right) = -\mathrm{z}\frac{\partial}{\partial z}\ln\left(1-ze^{-\frac{\varepsilon_i}{\tau}}\right)$$
$$= \frac{ze^{-\frac{\varepsilon_i}{\tau}}}{1-ze^{-\frac{\varepsilon_i}{\tau}}}\cdot\frac{z^{-1}e^{\frac{\varepsilon_i}{\tau}}}{z^{-1}e^{\frac{\varepsilon_i}{\tau}}} = \frac{1}{z^{-1}e^{\frac{\varepsilon_i}{\tau}}-1} \underset{z=e^{\frac{\mu}{\tau}}}{=} \frac{1}{e^{-\frac{\mu}{\tau}}e^{\frac{\varepsilon_i}{\tau}}-1} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\tau}}-1}$$

וניתן לראות כי $\langle N\rangle_i^B$ יכול להיות גדול מ-1 בהרבה.

<u>לסיכום</u>, יש המסמנים את מספר החלקיקים הממוצע ברמה ע"י האות f , ומוסיפים FD superscript או BE כדי להשאיר $\langle N\rangle$ למספר החלקיקים כל פני כל הרמות. לכן:

עבור פרמיונים:

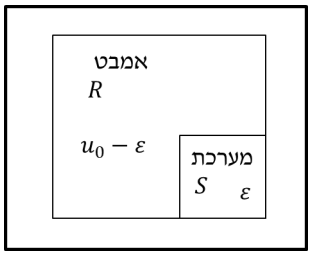
(26)
$$f^{FD}(\varepsilon_i) = \langle N\rangle_i^{FD} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\tau}}+1}$$

עבור בוזונים:

(27)
$$f^{BE}(\varepsilon_i) = \langle N\rangle_i^{BE} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\tau}}-1}$$

הרצאה 18 - השוואת צברים

תזכורת:
בשיעור הקודם הסתכלנו על המערכת הבאה:



שאלנו:

1. מה הסיכוי למצוא את המערכת במצב ספציפי, s, עם N חלקיקים ו-ε אנרגיה? מצאנו כי:

$$P_s\left(N,\varepsilon\right) \propto e^{\frac{\mu N-\varepsilon_s}{\tau}} \tag{1}$$

2. מה הסיכוי למצוא N חלקיקים ברמה ה-i-ית? מצאנו כי במקרה זה:

$$P_i\left(N,\varepsilon_i\right) \propto e^{\frac{\mu N-\varepsilon_i N}{\tau}} \tag{2}$$

מצאנו את התוצאה הזאת בזכות כך שיש לנו אינסוף חלקיקים במערכת.
ההבדל בין השאלות הוא שבשאלה 1 יש לנו מדפים ומצב של מערכת הוא למשל שיש חלקיק אחד ברמה הראשונה, 3 חלקיקים ברמה השנייה וכו'... ואנחנו שואלים מה הסיכוי לקונפיגורציה ספציפית של חלקיקים על המדפים.
בשאלה השנייה אנחנו מסתכלים על מדף ספציפי ושואלים מה הסיכוי שעליו יהיו N חלקיקים.

בנוסף חיפשנו את פקטור הנרמול של המקרה השני ומצאנו כי הוא שווה ל:

$$\mathcal{Z}_i = \sum_{N=0}^{\substack{\text{of number max}\\ \text{i level in particles}}} e^{\frac{\mu N-\varepsilon_i N}{\tau}} \tag{3}$$

כעת שאלנו מה מספר החלקיקים הממוצע ברמה ה-i? וגילינו כי:

$$\langle N\rangle_i = \frac{\sum_{N=0}^{\text{i in N max}} N e^{\frac{(\mu-\varepsilon_i)N}{\tau}}}{\mathcal{Z}_i} \tag{4}$$

ראינו כי יש שני סוגים של חלקיקים בטבע:

- פרמיונים: חלקיקים בהם הסכימה על מספר החלקיקים בכל רמה הולכת מ-0 עד 1.
- בוזונים: חלקיקים בהם הסכימה על מספר החלקיקים בכל רמה הולכת מ-0 עד ∞.

ואין אופציה באמצע ככול שידוע לנו כרגע, כלומר אין חלקיקים שבהם הסכימה הולכת מ-0 עד מספר סופי שאינו 1. יש תיאוריות על קיומם של חלקיקים שאינם בוזונים או פרמיונים בדו-ממד (במצב מוצק אפשר לחשוב על פילמים שהם קרוב לדו-ממד). לחלקיקים אלו קוראים אניונים ולא נגיד עליהם מילה אחת נוספת כי אין הוכחה ניסיונית לקיומם.

פוטונים הם בוזונים חסרי מסה. הייתה חסרה הוכחה לכך שקיימים בוזונים בעלי מסה (כלומר בוזונים שאינם פוטונים). בעבר היו רק ניסויים בהליום. אם מניחים שהליום 4 הוא בוזוני ניתן להסביר את תוצאות הניסויים ועוד נדבר על זה, אבל זה לא הוכחה. בשנים האחרונות נפתח תחום של אטומים קרים. בתחום זה הצליחו לקרר מערכות לננו קלווין (יואב שגיא וג'ף סטיינהאור בטכניון). במקרה כזה רוב הבוזונים אמורים להיות ברמה הנמוכה ביותר ומעט בוזונים ברמות גבוהות. כך ניתן לראות את הבדל מהותי בהתנהגות של בוזונים לעומת פרמיונים וממש למדוד את התפלגות בוז איינשטיין. כך הוכיחו את קיומם של הבוזונים וגם למי שהיה עוד ספק הגיע למסקנה שהעולם מחולק ל-2 סוגי חלקיקים והיום זאת עובדה מוגמרת.

קיבלנו את מספר החלקיקים הממוצע ברמה:

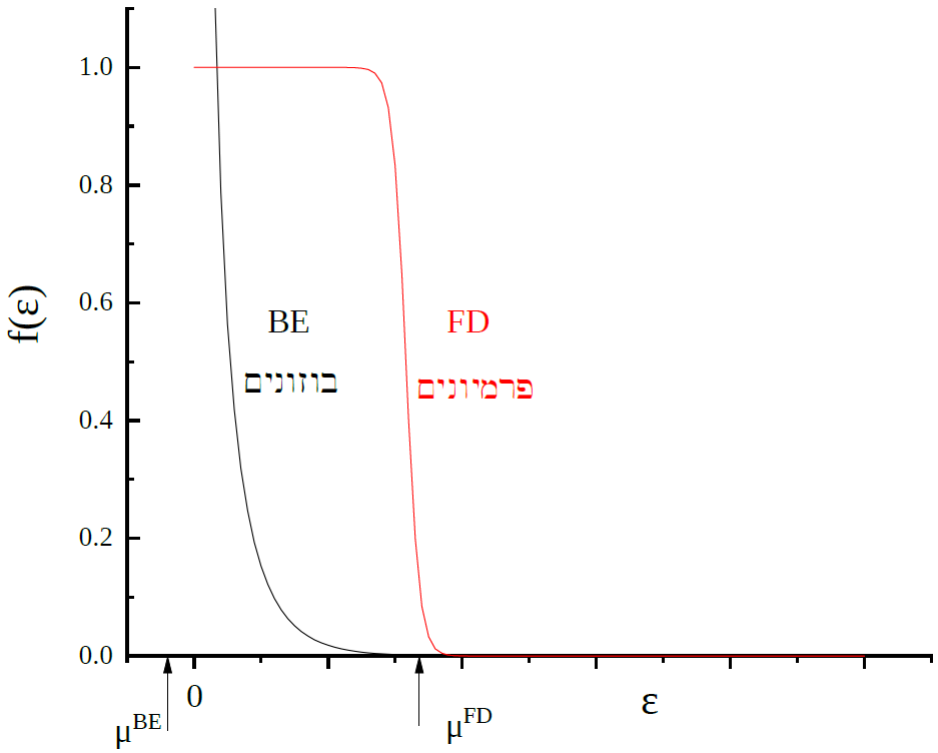
עבור פרמיונים:

$$f^{FD}(\varepsilon_i) = \langle N \rangle_i^{FD} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{\tau}} + 1} \tag{5}$$

עבור בוזונים:

$$f^{BE}(\varepsilon_i) = \langle N \rangle_i^{BE} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{\tau}} - 1} \tag{6}$$

נתייחס אל האנרגיה כמשתנה רציף ונצייר את הגרף של $f(\varepsilon)$ כפונקציה של ε:



נזכר כי בתחילת הקורס דיברנו על כך ש-μ נקבע עד כדי קבוע ולכן נוכל לקבוע את μ כך שיתקבלו הגרפים למעלה. בחירה זאת שקולה לבחירה שהאנרגיה הכי נמוכה במערכת היא אפס.
התפקיד של μ הוא לדאוג לכך שממוצע מספר החלקיקים במערכת - $\overline{N} = N$. את הסימון $\langle \rangle_i$ נשמור לממוצע ברמה i.
התחלנו את החישוב עם הביטוי:

$$\overline{N} = \frac{\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{s(N)} N \cdot e^{\frac{(\mu N - \varepsilon_s)}{\tau}}}{\mathcal{Z}} \tag{7}$$

אם אנחנו רוצים N חלקיקים במערכת עם טמפרטורה T אז מהביטוי הנ"ל אנחנו נקבל משוואה עבור μ ואז נוכל לבחור את μ כך שמספר החלקיקים והטמפרטורה מתאימים לדרישות שלנו.

עד עכשיו כל תוצאה שהגענו אליה והייתה נכונה עבור טמפרטורות גבוהות מ-3 סיבות:

1. מעבר מסכימה לאינטגרציה - כאשר עברנו מסכימה לאינטגרציה היינו צריכים לקחת בחשבון את השגיאה אשר הביאה לכך שהתוצאה שלנו הייתה נכונה לטמפרטורות גבוהות מאנרגית רמת היסוד. ניתן לפתור קירוב זה ע"י חישוב ישיר של הסכום במחשב, או שניתן לקחת איברים מסדר גבוה יותר (לפי הנוסחא של אוילר-מקלורן של מעבר מסכימה לאינגטגרציה).

2. למרות שלא דנו באינטראקציות רצינו שהצפיפות החלקיקים תהיה נמוכה ושהחלקיקים לא ירגישו אחד את השני כך שקרוב של גז אידאלי (ללא אינטראקציות) יהיה נכון. הבנו שהצפיפות צריכה להיות קטנה מהצפיפות העצמית המוגדרת ע"י טמפרטורה.

3. כדי שהחלקיקים יהיו בלתי מובחנים הכנסנו את ההתיקון של גיבס - דהיינו חילקנו ב-$N!$. עשינו זאת מתוך הנחה "שיש חלקיק אחד על כל מדף". אנחנו יכולים לעשות הנחה זו בטמפרטורות גבוהות. אבל במקרה זה אנחנו אפילו לא יודעים מה זה בדיוק טמפרטורות גבוהות או מה השגיאה שלנו.

בשיטה הגרנד קנונית לא ביצענו מעבר מסכימה לאינטגרציה ולא השתמשנו בתיקון של גיבס ולכן היא אינה מוגבלת לטמפרטורות גבוהות.

השיעור אנחנו רוצים לשאול את עצמנו האם בשיטה הגרנד קנונית בטמפרטורות גבוהות נקבל את אותה התוצאה כמו שקיבלנו עד היום ע"י התיקון של גיבס?

נזכר כי ראינו את התיקון של גיבס גם עבור חלקיקים קלאסיים וגם עבור חלקיקים קוונטים בקופסה ובשני המקרים קיבלנו את משפט החלוקה השווה ואת השוויון $PV=\tau N$. לעומת זאת, באנטרופיה קיבלנו ערכים שונים כאשר לוקחים את התיקון בחשבון וכאשר לא לוקחים אותו.

כעת נבדוק את רעיון האמבט הכפול הגרנד קנוני בגבול שבו $\langle N\rangle_i<1$. ניראה בהמשך שהגדרה זאת שקולה לטמפרטורות גבוהות (נקרא גם הגבול הקלאסי):

כדי שמספר החלקיקים ברמה יהיה קטן מ-1, דרוש שלכל i יתקיים:

$$\langle N\rangle_i<1\Rightarrow\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\tau}}\pm1}<1\Rightarrow e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\tau}}=e^{\frac{-\mu}{\tau}}e^{\frac{\varepsilon_i}{\tau}}\gg1 \tag{8}$$

אם נמספר את הרמות כך שהרמה הכי נמוכה הינה 0 נקבל שהדרישה לכך שמספר החלקיקים ברמה קטן מ-1 היא התנאי: $1\ll-\frac{\mu}{\tau}\Leftarrow\tau\ll-\mu$. מכיוון שטמפרטורה היא חיובית זה אומר ש-μ הוא שלילי.

נקבל שמספר החלקיקים הממוצע ברמה/מצב עם אנרגיה ε_i:

$$f^{MB}\left(\varepsilon_i\right)=\langle N\rangle_i^{MB}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\tau}}\pm1}\simeq e^{-\frac{\varepsilon_i-\mu}{\tau}} \tag{9}$$

להתפלגות זאת קוראים מקסוול-בולצמן. היא בלתי תלויה במספר החלקיקים ותקפה למספר חלקיקים קטן בכל רמה.

כעת נרצה למצוא את מספר החלקיקים הממוצע בכל המערכת. נעשה זאת ע"י סכימה של מספר החלקיקים הממוצע בכל רמה ונקבל:

$$\overline{N}=\sum_{\varepsilon_i}f\left(\varepsilon_i\right)\simeq\sum_{\varepsilon_i}e^{\frac{\mu}{\tau}}e^{-\frac{\varepsilon_i}{\tau}}=e^{\frac{\mu}{\tau}}\sum_{\varepsilon_i}e^{-\frac{\varepsilon_i}{\tau}}=e^{\frac{\mu}{\tau}}Z_1 \tag{10}$$

כאשר הסימון Z_1 במקרה זה קצת מבלבל. ב-Z_1 אנו מתכוונים לפונקציית החלוקה עבור חלקיק אחד שיכול להיות בכל המצבים של המערכת (להבדיל מפונקציית חלוקה של רמה 1 שמסומן כ-$\mathcal{Z}_1$) וראינו כי עבור חלקיק בקופסה בשלושה מימדים:

$$Z_1=Z_{3D,N=1}=\frac{n_Q}{n_1},\quad n_Q=\left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}},\quad n_1=\frac{1}{V} \tag{11}$$

נציב את זה חזרה ב-$\overline{N}$ ונקבל:

$$\overline{N}=e^{\frac{\mu}{\tau}}\left(\frac{n_Q}{n_1}\right)\Rightarrow\overline{N}=e^{\frac{\mu}{\tau}}\cdot n_Q\cdot V\Rightarrow\frac{\overline{N}}{V\cdot n_Q}=e^{\frac{\mu}{\tau}}\Rightarrow\frac{\mu}{\tau}=\ln\left(\frac{\overline{N}}{V\cdot n_Q}\right) \tag{12}$$

נסמן $\overline{n}=\frac{\overline{N}}{V}$ ונקבל:

$$\mu=\tau\ln\left(\frac{\overline{n}}{n_Q}\right) \tag{13}$$

וקיבלנו את אותה התוצאה כמו שקיבלנו עם התיקון של גיבס (מופיע בהרצאה 15 משוואה 32). התחלנו את התרגיל הזה בדרישה של מספר חלקיקים קטן בכל רמה ואנו רואים שההגדרה שקולה ל-μ שלילי וגדול בערכו המוחלט מ-τ ($-\mu\gg\tau$). בעבר הגדרנו טמפרטורה גבוהה ע"י הקשר $n_Q\gg\overline{n}$. קל לראות שההגדרות זהות ובטמפרטורות גבוהות נקבל ש-μ שלילי וגדול מ-τ בערכו המוחלט. נשים לב שבביטוי שקיבלנו בעבר (עם החישוב לפי התיקון של גיבס) ה-n היה בלי הקו למעלה וזה נובע מכך שבמקרה הקודם n סימל את מספר החלקיקים ששמתי בקופסה. במקרה שלנו אנחנו לא מכינים חלקיקים בקופסה, אלא יש לנו מספר חלקיקים ממוצע, מספר החלקיקים הוא משתנה סטטיסטי. בגבול התרמודינמי אנחנו אומרים ש: $\overline{n}=\frac{\overline{N}}{V}=\frac{N}{V}=n$. אנחנו רואים כי כאשר עשינו את החישוב עם מספר החלקיקים כקבוע של המערכת ואת החישוב עם מספר החלקיקים כמשתנה סטטיסטי וקיבלנו את אותה התוצאה בטמפרטורה גבוהה עבור μ.

נחשב את האנרגיה החופשית של המערכת: $F=F\left(\overline{N},\tau,V\right)$.

ראינו כי $\mu=\left(\frac{\partial F}{\partial\overline{N}}\right)_{\tau,V}$ ולכן נוכל לקבל את F ע"י:

$$F=\int_0^{\overline{N}} d\overline{N}'\mu\left(\overline{N}',\tau,V\right)+g\left(V,\tau\right) \tag{14}$$

כמו כן, ראינו כי $\mu=\tau\ln\left(\frac{\overline{N}}{N_Q}\right)$ כאשר $N_Q=n_Q\cdot V$ ולכן נקבל:

$$F=\tau\int_0^{\overline{N}} d\overline{N}'\ln\left(\frac{\overline{N}'}{N_Q}\right)+g\left(V,\tau\right) \tag{15}$$

ניעזר באינטגרל הידוע: $\int\ln\left(x\right)dx=x\ln x-x$ ונקבל:

$$F=\tau\left[\overline{N}\ln\overline{N}-\overline{N}-\overline{N}\ln\left(N_Q\right)\right]+g\left(V,\tau\right) \tag{16}$$

כאשר אין חלקיקים במערכת אין אנרגיה ואין אנטרופיה ולכן $F\left(\overline{N}=0\right)=0$ ולכן נקבל $g\left(V,\tau\right)\equiv 0$.
כלומר קיבלנו:

$$F=\tau\left[\overline{N}\ln\overline{N}-\overline{N}-\overline{N}\ln\left(N_Q\right)\right]=\tau\left[\overline{N}\ln\left(\frac{\overline{N}}{N_Q}\right)-\overline{N}\right]=\tau\overline{N}\left[\ln\left(\frac{\overline{n}}{n_Q}\right)-1\right] \tag{17}$$

כעת נחשב את הלחץ:

$$P=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{\tau,\overline{N}} \tag{18}$$

נשים לב כי F תלוי בנפח מכך ש-$\overline{n}=\frac{\overline{N}}{V}$ ולכן נקבל:

$$P=-\tau\overline{N}\left(-\frac{1}{V}\right)\Rightarrow PV=\overline{N}\tau \tag{19}$$

זה קשר שקיבלנו בעבר רק עם $\overline{N}=N$
עבור האנרגיה:

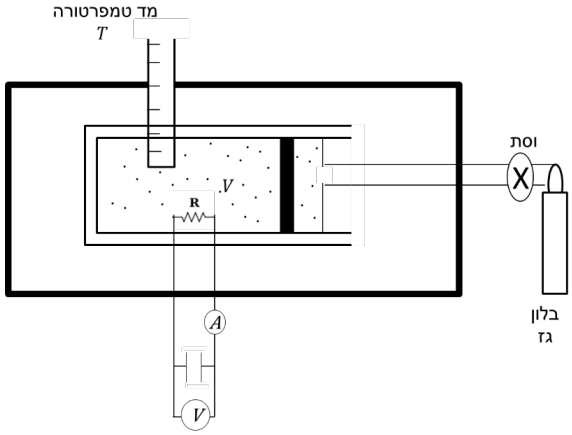
$$u=\overline{\varepsilon}=\tau^2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(-\frac{F}{\tau}\right)=\frac{3}{2}\overline{N}\tau \tag{20}$$

(זה נובע מכך ש-F תלוי ב-τ ע"י $n_Q\propto\tau^{\frac{3}{2}}$)
שוב זה קשר שקבלנו בעבר רק עם $\overline{N}=N$
עבור האנטרופיה:

$$\begin{aligned}\sigma=-\left(\frac{\partial F}{\partial\tau}\right)_{V,\overline{N}}=-\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\tau\overline{N}\left(\ln\left(\frac{\overline{n}}{n_Q}\right)-1\right)\right]=\ldots=-\left[\overline{N}\left(\ln\left(\frac{\overline{n}}{n_Q}\right)-1\right)-\tau\overline{N}\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left(n_Q\right)\right]= \\ =\tau\overline{N}\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left(\tau^{\frac{3}{2}}\right)-\overline{N}\ln\left(\frac{\overline{n}}{n_Q}\right)+\overline{N}=\frac{3}{2}\overline{N}-\overline{N}\ln\left(\frac{\overline{n}}{n_Q}\right)+\overline{N}=\overline{N}\left[\ln\left(\frac{n_Q}{\overline{n}}\right)+\frac{5}{2}\right]\end{aligned} \tag{21}$$

ושוב זה קשר שקבלנו בעבר רק עם $\overline{N}=N$ והתיקון של גיבס (עם חמש חצאים) וכן σ אקסטנסיבי כנדרש.

בעקרון אם אנחנו רוצים לבדוק את הנכונות של הביטוי הנ"ל עבור σ ניזכר בגדלים המדידים:



במערכת זו נמדוד את קיבול החום בנפח קבוע $C_V(T)$ ע"י נעילת הבוכנה למקומה:

$$C_V(T) = \frac{I \cdot V \cdot \Delta t}{\Delta T}$$

ניתן פולס של זרם לנגד, הוא יחמם את המערכת והטמפרטורה תעלה. נמדוד את שינויי הטמפרטורה לאחר כל פולס ונוכל לצייר את הגרף של C_V. לחילופין אנחנו יכולים לשים את כל המערכת במקרר/תנור ובכל טמפרטורה ניתן פולס קטן של אנרגיה ונבדוק את השינוי בטמפרטורה.

$$C_V = \frac{\tau \cdot d\sigma}{d\tau} \tag{22}$$

ולכן נקבל:

$$\int_0^T \frac{C_V}{\tau} d\tau = \sigma(T) - \sigma(0) \tag{23}$$

$$\sigma(0) = 0$$

אם אנחנו מתחילים מטמפרטורה מאוד נמוכה ועושים את האינטגרל הנ"ל עד טמפרטורה גבוהה יחסית אז אנחנו יכולים למצוא את $\sigma(T)$, ולהשוות לביטוי שקיבלנו היום עבור σ. הניסוי עצמו קשה עקב מעבר תחומי טמפרטורה שונים, אי היכולת למדוד מטמפרטורה אפס, אי היכולת לבודד מערכת לגמרי, וכו'. אבל בכל מקרה חלקיקים נחשבים לבלתי מובחנים והתיקון של גיבס נכון.

גרנד פוטנציאל:

כעת אנחנו נדון במערכות בהם אנחנו מצומדים לאמבט חום ואמבט חלקיקים. אנחנו צריכים למצוא פוטנציאל חדש שמקבל אקסטרימום במצב שווי משקל.

נגדיר את הגרנד פוטנציאל $\Omega = \Omega(\tau, \mu, V)$ כאשר Ω הוא התמרת לג'נדר שבה נעלם מספר החלקיקים אבל מופיע μ (נזכר כי אמרנו ש-μ שולט במספר החלקיקים). הגרנד פוטנציאל הינו:

$$\Omega = u - \tau\sigma - \mu N \Rightarrow d\Omega = du - \tau d\sigma - \sigma d\tau - \mu dN - N d\mu \tag{24}$$

נשתמש ב: $du = \tau d\sigma - PdV + \mu dN$ ונקבל:

$$d\Omega = -PdV - \sigma d\tau - N d\mu \tag{25}$$

ומתוך כך נגזור את הקשרים הבאים:

$$P = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right)_{\tau,\mu}, \quad N = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{V,\tau}, \quad \sigma = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \tau}\right)_{V,\mu} \tag{26}$$

נשים לב כי גרנד פוטנציאל הוא אקסטנסיבי ואדיטיבי, גרנד פוטנציאל הכולל של שתי מערכות הוא סכום הגרנד פוטנציאלים שלהן.

כעת אנחנו רוצים להבין איך אנחנו יכולים לחשב את הגרנד פוטנציאל מההמילטוניאן. אנחנו שואפים לכך שבהינתן המילטוניאן אנחנו נוכל למצוא את הגרנד פוטנציאל ולהסיק ממנו מסקנות שנוכל לבדוק.

מהביטוי לגרנד פוטנציאל נקבל:

$$u = \Omega + \tau \overbrace{\sigma}^{=-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\right)_{V,\mu}} + \mu \overbrace{N}^{-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{V,\tau}} = \overbrace{\Omega - \tau\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\right)_{V,\mu}}^{=-\tau^2\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\Omega}{\tau}\right)\right)_{V,\mu}} - \mu\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right)_{V,\tau} = \tag{27}$$
$$= -\tau^2\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\Omega}{\tau}\right)\right)_{V,\mu} - \mu\tau\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\Omega}{\tau}\right)\right)_{V,\tau} = -\left(\tau^2\frac{\partial}{\partial\tau} + \mu\tau\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\left(\frac{\Omega}{\tau}\right)$$

כאשר במעבר האחרון, בביטוי עם הנגזרת לפי μ כפלנו וחילקנו ב-τ ומאחר שהגזירה מתבצעת ב-τ קבוע יכולנו להכניס את ה-τ במכנה לתוך הגזירה.
אנחנו יודעים ממכניקה סטטיסטית לחשב את האנרגיה הממוצעת מפונקציית החלוקה (מופיע בהרצאה 17 משוואה 6):

$$\langle\varepsilon\rangle = \left(\tau^2\frac{\partial}{\partial\tau} + \mu\tau\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\ln\mathcal{Z} \tag{28}$$

וקיבלנו ביטוי לאנרגיה מפונקציית החלוקה מחד ומהגרנד פוטנציאל מאידך. אנחנו מניחים שבגבול התרמודינמי, כלומר במערכות מאוד גדולות מתקיים: $\langle\varepsilon\rangle = u$. כלומר:

$$\left(\tau^2\frac{\partial}{\partial\tau} + \mu\tau\frac{\partial}{\partial\mu}\right)(\ln\mathcal{Z}) = -\left(\tau^2\frac{\partial}{\partial\tau} + \mu\tau\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\left(\frac{\Omega}{\tau}\right) \tag{29}$$

משוואה זאת מציעה ש:

$$\Omega = -\tau\ln\mathcal{Z} \tag{30}$$

בתרגיל 9 אנו מראים שאכן הקשר הנכון. לכן בהינתן המילטוניאן אנחנו יודעים לחשב רמות אנרגיה, מרמות האנרגיה אנחנו יכולים לחשב את Ω ולקבל באמצעות הקשר הנ"ל את Ω בשיווי משקל.

ראינו בעבר כי כל האינפורמציה של המערכת שמורה ב-$\mathcal{Z}$. מה שעשינו עכשיו זה לקחנו את $\mathcal{Z}$ הפעלנו $\ln$, כפלנו ב-τ ונתנו לה שם אחר. ב-Ω יש לנו את אותה האינפורמציה כמו ב-$\mathcal{Z}$ שזו למעשה כל האינפורמציה של המערכת. זה שונה מ-F שיש בה גם אינפורמציה על העבודה שניתן להפיק מהמערכת.

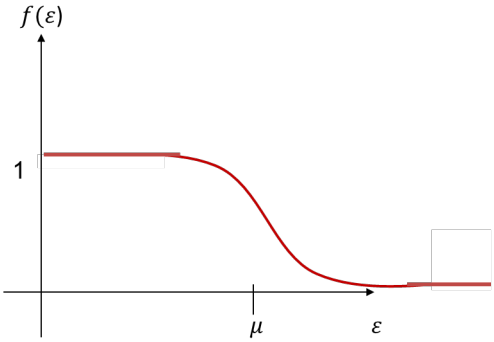
הרצאה 19 - גז פרמיונים

בשיטה הגרנד קנונית (עדיין) לא ביצענו מעבר מסכימה לאינטגרציה ולא השתמשנו בתיקון של גיבס ולכן היא אינה מוגבלת לטמפרטורות גבוהות. בטמפרטורות גבוהות קיבלנו את כל התוצאות שהכרנו בעבר.
השיטה הגרנד קנונית תקפה בכל טמפרטורה.

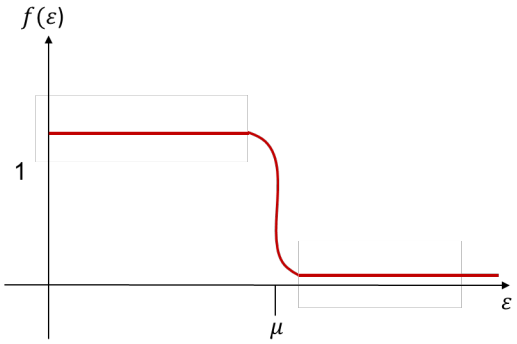
נדון בגז של פרמיונים החל מטמפרטורה אפס ומעלה, כשלנגד עיננו אלקטרונים במתכת שאינם קופאים וממשיכים להוליך חשמל בכל טמפרטורה. זאת בניגוד לגזים אטומיים הקופאים, מלבד הליום שהופך לנוזל. הקיפאון מעיד על אינטראקציות.

<u>בטמפרטורה אפס:</u>
נדון בפרמיונים בקופסא בטמפרטורה אפס.
ראינו כי:

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}+1} \tag{1}$$



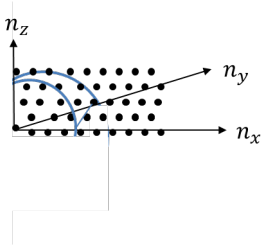
ככל ש-τ נמוך יותר, איזור המעבר קטן יותר. כלומר, ככל שהטמפרטורה יותר קטנה, הפונקציה יותר חדה. בטמפרטורה מאוד מאוד נמוכה נקבל את הגרף הבא:



בגבול שבו הטמפרטורה היא אפס הפונקציה הופכת להיות פונקציית מדרגה. אם יש לנו קופסה מלאה בחלקיקים, האנרגיה של כל חלקיק בקופסא הוא:

$$\varepsilon=\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right) \tag{2}$$

חוץ מ-$\vec{n}$ יש לאלקטרון תכונה נוספת: מומנט מעלה/ מטה ולכן יש לנו ערך נוסף אשר (קוראים לו ספין) ויש לו 2 אפשרויות: למעלה ולמטה. ללא שדה מגנטי למומנט אין חשיבות אלא בעובדה שבכל מצב קוונטי יש שני אלקטרונים במקום אחד. נסתכל על המרחב שנפרש ע"י $\vec{n}$. כל נקודה במרחב מציינת חלקיק בעל האנרגיה E כאשר הצבנו ב-E את ערכי (n_x,n_y,n_z) של הנקודה.



בכל נקודה שעבורה $\varepsilon < \mu$ נמקם שני חלקיקים (אחד עם ספין מעלה והשני עם ספין מטה). נזכר כי אמרנו ששני חלקיקים לא יכולים להיות באותו המצב אבל במקרה זה לחלקיקים אין את אותו הספין ולכן יש לנו שני מצבים שונים עבור כל נקודה ונוכל למקם בה שני חלקיקים. עבור נקודות שמקיימות $\varepsilon > \mu$ מספר החלקיקים הממוצע המצב הוא אפס. דהיינו אין חלקיקים.

אנחנו רוצים למקם חלקיקים כך שנקבל מינימום אנרגיה, רכיבי $\overrightarrow{n}$ שלמים אי שליליים ואנחנו יכולים למקם שני חלקיקים בכל נקודה וכאשר מספר החלקיקים נתון לנו אנחנו רוצים למצוא את הרדיוס של הנקודה הרחוקה ביותר בה אנחנו יכולים למקם חלקיק. כלומר, אנחנו מתחילים למקם את החלקיקים החל מאנרגיה 0 (לא כולל) ועולים כלפי מעלה (כאשר ממקמים חלקיקים לפי החוקיות הנ"ל) עד שנגמרים לנו החלקיקים.

נמצא את הרדיוס של הנקודה הכי רחוקה שהגענו אליה. מרחב המצבים יראה כך:

נפח של $\frac{1}{8}$ במרחב ה-$\overrightarrow{n}$-ים עבור כדור ברדיוס n הינו:

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot n^3 = \frac{\pi}{6} n^3 \tag{3}$$

אנחנו נקבל כי מספר כל האלקטרונים שאנחנו יכולים למקם ב-$\frac{1}{8}$ כדור ברדיוס n הוא $\frac{1}{2}N = \frac{\pi}{6}n^3$ מכיוון שאנחנו שמים שני אלקטרונים בכל נקודה על הכדור ולכן נקבל ש-$N = \frac{\pi}{3}n^3$.
נסמן ב-n_f את ה-n אשר עבורו מתקיים השוויון הנ"ל (רדיוס הכדור המלא במרחב $\overrightarrow{n}$) ונרשום:

$$N = \frac{\pi}{3} n_f^3 \tag{4}$$

האינדקס f בא מפרמיונים. כל החלקיקים שיושבים על שפת הספירה מקיימים את הקשר הזה וה-n שלהם הוא n_f והאנרגיה שלהם היא:

$$\varepsilon_f = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n_f^2 \tag{5}$$

עפ"י הסימונים החדשים:
n_f = ה-n של החלקיקים עם האנרגיה הכי גבוהה ב-$\tau = 0$.
ε_f = האנרגיה של החלקיקים עם האנרגיה הכי גבוהה ב-$\tau = 0$.

$$\varepsilon_f = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi^3}{L^3}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \overbrace{=}^{L^3=V} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi^2 3N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}} \tag{6}$$

כאשר $n = \frac{N}{V}$ זו צפיפות האלקטרונים בקופסא. זהירות לאות n יש שתי משמעויות.

<u>לעבוד הפוך</u>
לפי ההיגיון שעבדנו אתו עד כה מישהו צריך לתת לנו את μ אשר ממנו יקבע N. נעשה תעלול מחשבתי - נעבוד הפוך: אנחנו יודעים את מספר האלקטרונים לפי כמות האטומים שיש לנו במוצק ומתוכם אנחנו יודעים כמה אלקטרונים תורמים להולכה, ולפי זה אנחנו יכולים לדעת כמה אלקטרונים יש לנו. במקום ש-μ יקבע את N בקופסא אנחנו אומרים ש-μ קבע את N איפשהו בהתחלה, כשהמתכת נוצרה, ועכשיו שאנחנו יודעים את N נוכל למצוא את μ שהיה כשהטבע הכין את המתכת.

בטמפרטורה אפס מתקיים $\mu = \varepsilon_f$

למרות שהמתכת נוצרה עם פוטנציאל כימי כל שהוא, עדיין יש לנו שליטה בו. למשל אנחנו יכולים לחבר בטרייה בין המתכת לאדמה ולשנות את μ. אם נטען את המתכת חיובית זה אומר שהוצאנו ממנה אלקטרונים. אם טענו אותה שלילית הוספנו לה אלקטרונים.

במתכת אנחנו מצפים מ-ε_f להיות (בערך):

$$\varepsilon_f = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 n\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{c^2}{c^2} \left(\frac{27}{(4A)^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2,000^2 eV^2 \mathring{A}^2}{2 \cdot 0.5 MeV} \cdot \left(\frac{27}{64 \mathring{A}^3}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{7}$$

כל המתכות בנויות מאטומים מסודרים מתאי יחידה. הגודל של כל תא יחידה הוא $4A$ בחזקת 3. בכל תא יחידה יש אלקטרון חופשי אחד (או יותר).

$$\hbar c = 2,000 eV \mathring{A} \tag{8}$$

$$mc^2 = 0.5MeV \tag{9}$$

ונקבל:

$$\varepsilon_f \cong 1eV \tag{10}$$

אנרגיית פרמי היא מסדר גודל של $1eV$ וזה סדר גודל של אנרגיית יינון של אטום. אנרגיית יינון של אטום המימן היא $13.6eV$.

$$1eV = 11690K \cdot k_B \approx 10,000K \cdot k_B \tag{11}$$

ביחידות של טמפרטורה $1eV$ הינו מספר גדול מאוד. זאת אומרת שכאשר אנחנו אומרים שבטמפרטורה נמוכה $f(\varepsilon)$ נראה כמו פונקצית מדרגה אז טמפרטורה החדר נחשבת נמוכה.

מה האנרגיה הכוללת של גז פרמי בטמפרטורה אפס?

$$u(\tau = 0) = \overline{\varepsilon}(\tau = 0) = 2 \cdot \sum_{n<n_f} \varepsilon_{\overrightarrow{n}} \tag{12}$$

$$\varepsilon_{\overrightarrow{n}} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \overrightarrow{n}^2 \tag{13}$$

אנחנו רצים על כל ה-n-ים, בכל n יש לנו 2 אלקטרונים (בזכות הספין) ואנחנו מסכמים על האנרגיה שלהם.
על מנת לחשב את הסכום הנ"ל נבצע מעבר לאינטגרציה. נשים לב כי במקרה זה ה-n-ים מתקדמים בקפיצות של 1 ולכן אין לנו תיקון סקלה במעבר זה. נקבל:

$$u(\tau = 0) = 2 \cdot \frac{1}{8}\int_0^{n_f} 4\pi n^2 dn \cdot \varepsilon_n = \pi\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \int_0^{n_f} n^2 dn \cdot n^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^3}{L^2}\frac{n_f^5}{5} \tag{14}$$

כאשר אנחנו כופלים ב-$\frac{1}{8}$ כי ערכי n אי שליליים.

$$\Rightarrow u(\tau = 0) = \frac{3}{5}N\varepsilon_f \tag{15}$$

(תרגיל: להוכיח את השוויון הנ"ל).

<u>גז פרמיונים בטמפרטורה סופית</u>
עד עכשיו עשינו הכול בטמפרטורה 0. עכשיו נסתכל על טמפרטורה שונה מ-0:
בטמפרטורה סופית, כשנרצה לחשב ממוצע של גודל כל שהוא שתלוי במצבי המערכת $O_{\overrightarrow{n}}$ ללא שדה מגנטי נעשה:

$$\overline{O} = 2\sum_{\overrightarrow{n}} f(\varepsilon_{\overrightarrow{n}}, \tau, \mu)\langle\psi_{\overrightarrow{n}}|O|\psi_{\overrightarrow{n}}\rangle = 2 \cdot \frac{1}{8}\int 4\pi n^2 dn \langle\psi_{\overrightarrow{n}}|O|\psi_{\overrightarrow{n}}\rangle f(\varepsilon_{\overrightarrow{n}}, \mu, \tau) \tag{16}$$

למשל, נחשב את האנרגיה ומספר החלקיקים הממוצע ב-$\tau \neq 0$:

$$\overline{\varepsilon} = \pi\int n^2 dn \varepsilon_{\overrightarrow{n}} f(\varepsilon_{\overrightarrow{n}}, \tau, \mu) \tag{17}$$

$$\overline{N} = \pi\int n^2 dn f(\varepsilon_{\overrightarrow{n}}, \tau, \mu) \tag{18}$$

כאשר:

$$f\left(\varepsilon_{\overrightarrow{n}},\tau,\mu\right)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_{\overrightarrow{n}}-\mu}{\tau}}+1} \tag{19}$$

הוא מספר החלקיקים הממוצע ברמה ה-$\overrightarrow{n}$-ית.
בשיעור שעבר רשמנו:

$$\overline{N}=\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{\varepsilon_s(N)}\frac{Ne^{\frac{\mu N-\varepsilon_s(N)}{\tau}}}{\mathcal{Z}} \tag{20}$$

הביטוי הזה אומר שאם אנחנו רוצים למצוא את מספר החלקיקים בממוצע אנחנו סוכמים על כמות החלקיקים שיכולים להיות במערכת, ועבור כל מספר חלקיק נתון סוכמים את האפשרויות של חלקיקים אלו להיות בכל הקונפיגורציות של הרמות. החישוב של $\overline{N}$ לפי 20 הינו חישוב קשה לעומת החישוב של $\langle N\rangle_i$, כלומר קיבלנו ביטוי פשוט יותר וזה התאפשר לנו כי הרשינו אין סוף חלקיקים, הגדרנו פוטנציאל כימי, חישבנו את מספר החלקיקים הממוצע בכל רמה, ורק לבסוף אנחנו מסכמים על כל הרמות.

הפטנט של "לעבוד הפוך" אומר שאם יש לנו חומר שאנחנו יודעים את N במערכת אז נדרוש ש:

$$N=\overline{N} \tag{21}$$

ואז ע"י משוואה (18) נקבע את μ. האחריות של μ היא לוודא שמשוואה (18) מתקיימת בכל טמפרטורה שכן בחומר מספר האלקטרונים לא משתנה כשמשנים טמפרטורה. לכן μ הופך להיות פונקציה של הטמפרטורה למרות שכשהתחלנו את הסיפור הגרנד קנוני μ ניתן מבחוץ והיה קבוע לא תלוי בטמפרטורה. אנחנו יכולים לדעת את N ע"י כך שאנחנו יודעים שכל תא יחידה תורם אלקטרון ואנחנו יודעים את מספר תאי היחידה בחומר. כלומר אנחנו יודעים איך למצוא את N בקלות, והוא קובע את μ. כשמשנים את הטמפרטורה - μ ישתנה בהתאם, כך שמשוואה (18) תתקיים.

עכשיו אנחנו רוצים להגיע לביטויים פשוטים יותר עבור $\overline{N},\bar{\varepsilon}$. נשים לב שבאינטגרליים הנ"ל כל הנקודות שוות מרחק מהראשית במרחב $\overrightarrow{n}$ מקבלות את אותו ערך של ε ולכן אנחנו נרצה לעבור מאינטגרל על dn לאינטגרל על $d\varepsilon$, כלומר אנחנו רוצים למצוא $g\left(\varepsilon\right)$ כך ש:

$$g\left(n\right)dn=g\left(\varepsilon\right)d\varepsilon\Rightarrow g\left(\varepsilon\right)=g\left(n\right)\frac{dn}{d\varepsilon}=g\left(n\right)\left(\frac{d\varepsilon}{dn}\right)^{-1} \tag{22}$$

כאשר $g\left(n\right)$ זה כל מה שכופל את dn באינטגרל של f. כלומר, $g\left(n\right)$ זה מספר המצבים שיש לנו ב-dn.
נשים לב כי ניתן להפוך את הקשר ולקבל (נשתמש בהמשך):

$$n\left(\varepsilon\right)=\sqrt{2m\varepsilon_{\overrightarrow{n}}}\frac{L}{\hbar\pi} \tag{23}$$

<u>זהירות $g\left(\varepsilon\right)$ זה לא להציב את ε ב-$g\left(n\right)$. משתמשים באותו שם לשתי פונקציות שונות של הארגומנטים שונים וצריך להבין מהארגומנט במה מדובר.</u>

<u>תזכורת:</u>
עשינו את אותו התהליך כאשר דיברנו על קרינת גוף שחור עם אור. באור היה לנו:

$$\varepsilon_{photon}=\hbar\omega=\hbar ck,\quad k=\left(\frac{\pi}{L}\right)n,\quad n=\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2} \tag{24}$$

ועברנו מאינטגרציה על n לאינטגרציה על האנרגיה.
עבור אלקטרונים:

$$\varepsilon_{electron}\left(\overrightarrow{k}\right)=\frac{\hbar^2k^2}{2m},\quad k^2=\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right) \tag{25}$$

במקרה שלנו (עבור חלקיקים בקופסא) מתקיים לפי (17) ו-(18):

$$g_{3D}\left(n\right)=\pi n^2 \tag{26}$$

עם הקשר (13) בין האנרגיה למספר הקוונטים נקבל:

$$g_{3D}(\varepsilon)=\pi n^2\left(2\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n\right)^{-1}=\pi n^2\frac{m}{\hbar^2}\frac{L^2}{\pi^2}\frac{1}{n}=\left.\frac{m}{\hbar^2}\frac{L^2}{\pi}n\right|_{n=n(\varepsilon)}=\frac{m}{\hbar^2}\frac{L^2}{\pi}\sqrt{2m\varepsilon}\frac{L}{\hbar\pi}\underbrace{=}_{V=L^3}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{V}{2\pi^2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

כאשר השתמשנו ב-(23).
תרגיל: למצוא את $g(\varepsilon)$ עבור דו- מימד. במקרה זה ההבדל הוא:

$$g_{2D}(n)=\frac{2\pi n}{4}\cdot 2=\pi n \quad (28)$$

ביטוי זה מתקבל מכיוון שבדו-מימד אנחנו עוברים על טבעות (להבדיל מקליפות בצל) במרחב n ולכן אלמנט השטח הוא $2\pi n dn$, מאחר ש-$n_x,n_y\geq 0$ אז אנחנו לוקחים רק רבע מהמרחב (מישור) ומכפילים פי 2 עבור הספין.
נקבל:

$$g_{2D}(\varepsilon)=\pi n\left(\frac{d\varepsilon}{dn}\right)^{-1}=\pi n\left(2\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n\right)^{-1}=\frac{mL^2}{\pi\hbar^2} \quad (29)$$

בעיות שונות בפיסיקה נבדלות רק ב-g והאם החלקיקים הם בוזונים או פרמיונים. g נקרא צפיפות המצבים. מה שקובע את g זה המימד של הבעיה ויחס הנפיצה (יחס הנפיצה הוא $\varepsilon\left(\overrightarrow{k}\right)$ שזה נותן את הקשר בין האנרגיה לבין מספר הגל, $\overrightarrow{k}$. לאלקטרונים לדוגמה מתקיים $\varepsilon\left(\overrightarrow{k}\right)=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ והם פרמיונים. מהם ה-$\overrightarrow{k}$ המותרים מגיע מתנאי השפה).

בסה"כ מקבלים לאלקטרונים:

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon}&=\int g(\varepsilon)\,d\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot f(\varepsilon,\tau,\mu)\\ \overline{N}&=\int g(\varepsilon)\,d\varepsilon\cdot f(\varepsilon,\tau,\mu)\end{aligned},\quad f=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}+1} \quad (30)$$

ובאופן כללי:

$$\overline{O}=\int g(\varepsilon)\,d\varepsilon\cdot\langle\psi|O|\psi\rangle(\varepsilon)\cdot f(\varepsilon,\tau,\mu)$$

כאשר $\langle\psi|O|\psi\rangle(\varepsilon)$ זה $\langle\psi_{\overrightarrow{n}}|O|\psi_{\overrightarrow{n}}\rangle$ פלוס מעבר מ-$\overrightarrow{n}$ ל-ε. גבולות האינטגרציה הם מהאנרגיה הנמוכה ביותר המותרת עד אין סוף.

ניראה שהאינטגרלים לא תלויים במצבי המערכת- $\overrightarrow{n}$. אבל בבעיה הזאת "קוונטים" נכנס רק דרך צפיפות המצבים. כמו כן אנו רואים שבחיי היום יום צפיפות מצבים זה גודל יותר פרקטי ממספר המצבים.

הרצאה 20 - פוטנציאל כימי של אלקטרונים במתכת וקיבול חום

חזרה: פרמיונים בטמפרטורה סופית:
ראינו בשיעור שעבר ביטויים כלליים ע"י שימוש בפונקציית פרמי. להלן שניים מתוכם:

$$u = \pi \int n^2 dn \varepsilon_{\vec{n}} f\left(\varepsilon_{\vec{n}}, \tau, \mu\right) \tag{1}$$

$$N = \pi \int n^2 dn f\left(\varepsilon_{\vec{n}}, \tau, \mu\right) \tag{2}$$

כאשר:

$$f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_{\vec{n}} - \mu}{\tau}} + 1} \tag{3}$$

במקרה של אנרגיה של חלקיק בקופסא:

$$\varepsilon_{\vec{n}} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2, \quad n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \tag{4}$$

כדי לבצע את האינטגרציה השתמשנו:

$$g\left(n\right) dn = g\left(\varepsilon\right) d\varepsilon \Rightarrow g\left(\varepsilon\right) = g\left(n\right) \frac{dn}{d\varepsilon} = g\left(n\right)\left(\frac{d\varepsilon}{dn}\right)^{-1} \tag{5}$$

כאשר $g\left(n\right)$ זה כל מה שכופל את dn באינטגרל של f. כלומר, $g\left(n\right)$ זה מספר המצבים שיש לנו ב- dn.
נשים לב כי ניתן להפוך את הקשר ולקבל:

$$n\left(\varepsilon\right) = \sqrt{2m\varepsilon}\frac{L}{\hbar\pi} \tag{6}$$

במקרה שלנו (עבור חלקיקים בקופסא ב-$3D$) מתקיים:

$$g_{3D}\left(n\right) = \pi n^2 \tag{7}$$

עם הקשר (4) בין האנרגיה למספרים הקוונטים נקבל:

$$g\left(\varepsilon\right) = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{2\pi^2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

ואז:

$$\begin{matrix} u = \int g\left(\varepsilon\right) d\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot f\left(\varepsilon, \tau, \mu\right) \\ N = \int g\left(\varepsilon\right) d\varepsilon \cdot f\left(\varepsilon, \tau, \mu\right) \end{matrix}, \quad f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{\tau}} + 1}$$

חשוב לשים לב ש-$g\left(\varepsilon\right) = \#\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

קיבול חום של אלקטרונים במתכת:
תזכורת לקיבול חום לגז אידאלי:

$$u = \frac{3}{2}N\tau, \quad PV = N\tau$$

$$C_V = \left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_V = \tau\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\right)_V$$

$$C_P = \tau \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \right)_P$$

משימור אנרגיה: $\tau d\sigma = du + PdV$ ולכן נקבל:
עבור נפח קבוע:

$$C_V = \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_V = \frac{3}{2} N$$

עבור לחץ קבוע:

$$C_P = \tau \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_P + P \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} \right)_P$$

נציב את זה ואת הביטוי של C_P במשוואה שקיבלנו משימור אנרגיה ונקבל:

$$C_P = \frac{3}{2} N + N = \frac{5}{2} N$$

ביחידות בפרקטיות במעבדה:

$$C_V = \frac{3}{2} N k_B \tag{9}$$

$$C_P = \frac{5}{2} N k_B \tag{10}$$

כאשר קיבלנו את (9) ע"י שימוש במשפט חלוקה שווה (ספרנו דרגות חופש ריבועיות).

בשונה מגז בבוכנה, מתכת לא מגדילה את ניפחה כמעט כאשר מחממים אותה (היא מתנפחת אבל מעט מאוד ולכן נזניח את זה). לכן הגודל החשוב הוא C_V ומסמנים רק C. דרגות החופש במתכת הן היונים ואלקטרונים חופשיים (חלקיקים שונים) אשר יכולים לנוע בנפרד אחד מהשני. אם נזיז קצת את האטום הוא ירצה לחזור למקום שלו ונקבל תנועה הרמונית, ולכן קירוב פשוט לתנועה של האטום במוצק הוא שכל אטום קשור בקפיץ למקום שלו. נגיד לרגע שהיונים "מחוברים למקום" כאילו שהם מוחזקים בקפיץ. לכן נקבל 3 דרגות חופש עבור המיקום ו-3 דרגות חופש עבור התנע (אוסצילטור הרמוני). האלקטרונים חופשיים לזוז לכן יש להם רק 3 דרגות חופש ריבועיות בלבד. בהינתן מספר האלקטרונים החופשיים פר אטום מתכתי אנחנו יכולים למנות את דרגות החופש וע"י כך למצוא את C_V עבור מתכות המתקבל משני סוגי החלקיקים. מניסויים גילו שהתוצאה שמקבלים משימוש במשפט חלוקה שווה לא מתאים לניסוי. כלומר, שימוש במשפט חלוקה שווה בלבד ע"י ספירת דרגות חופש במתכת לא ייתן תוצאה שמתאימה לניסוי כאילו שחסרות דרגות חופש.

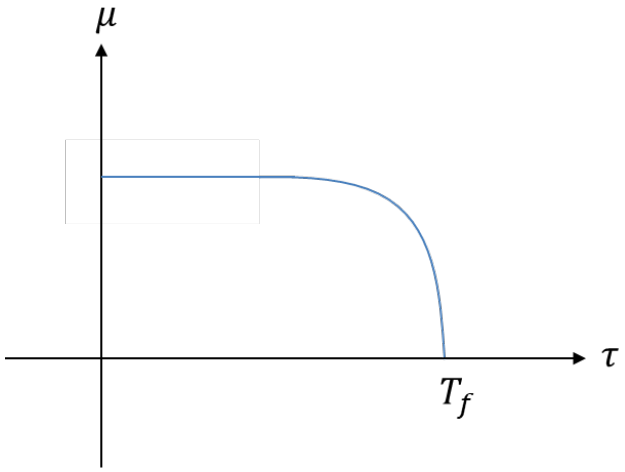
בשיעור זה ננסה לחשוב על הבעיה הנ"ל מהקונספט של פרמיונים ונגיע לתוצאה שמתאימה לניסוי. פתרון זה שכנע את העולם שיש פרמיונים.

נסתכל על הביטוי ל-N שראינו קודם:

$$N = \int g(\varepsilon)\, d\varepsilon \cdot f(\varepsilon, \tau, \mu) \tag{11}$$

מאחר שאנחנו מבצעים אינטגרציה על ε אזי לאחר האינטגרל נקבל קשר בין τ, μ בלבד $\mu = \mu(\tau)$ (כי אלה המשתנים היחידים באינטגרל אשר נובעים מהתלות $f = f(\varepsilon, \tau, \mu)$).

בשבוע שעבר הגדרנו את אנרגית פרמי. נגדיר עכשיו את טמפרטורת פרמי: $\frac{\varepsilon_f}{k_B} = T_f$ (אנרגיית פרמי זו האנרגיה של החלקיק בעל האנרגיה המקסימלית בטמפרטורה 0). ראינו כי טמפרטורת פרמי גבוהה מאוד, אלפי מעלות.
אנחנו רוצים להראות ש:



כלומר, אנחנו רוצים להראות שבטמפרטורות שאנחנו מתעסקים בהן (טמפרטורות החדר) מתקיים $\frac{d\mu}{d\tau}=0$.
אנחנו יכולים לפתור נומרית ולמצוא את $\mu\left(T\right)$ לצייר ולראות שהציור נכון אבל מזה לא לומדים כלום. עדיף לעשות את החשבון בסבלנות פעם אחת בחיים וזהו.
קשה להוכיח ש-$\frac{d\mu}{d\tau}=0$ בכל מקום ולכן אנחנו נוכיח ש-$\left.\frac{d\mu}{d\tau}\right|_{T=0}=0$ ובגלל שסקלת הטמפרטורה מאוד גדולה זה יהיה מספיק.

מאחר שמספר האלקטרונים הוא קבוע נקבל:

$$0=\frac{dN}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty g\left(\varepsilon\right)d\varepsilon f\left(\varepsilon,\tau,\mu\right) \tag{12}$$

ראינו כי $g\left(\varepsilon\right)=\#\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ ולכן נקבל (לאחר צמצומים):

$$0=\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon f\left(\varepsilon,\tau,\mu\right)=\int_0^\infty \varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{d}{d\tau}f\left(\varepsilon,\tau,\mu\right)d\varepsilon \tag{13}$$

נמצא את $\frac{d}{d\tau}f\left(\varepsilon,\tau,\mu\right)$:

$$\frac{d}{d\tau}f\left(\varepsilon,\tau,\mu\right)=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}+1}\right)=-\frac{1}{\left(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}+1\right)^2}\cdot e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}\cdot\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}\right)= \tag{14}$$
$$=\frac{1}{\left(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}+1\right)\left(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}+1\right)}e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}\left[\frac{\varepsilon-\mu}{\tau^2}+\frac{1}{\tau}\frac{d\mu}{d\tau}\right]=\frac{1}{\tau\left(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}+1\right)\left(e^{-\left(\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}\right)}+1\right)}\left[\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}+\frac{d\mu}{d\tau}\right]$$

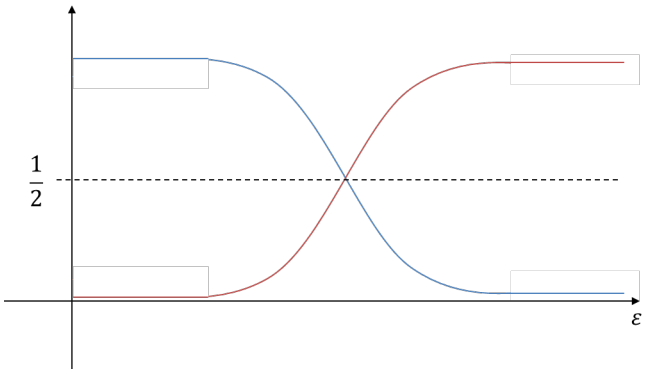
נציב את זה באינטגרל ונקבל:

$$0=\int_0^\infty \varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\tau\left(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}+1\right)\left(e^{-\left(\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}\right)}+1\right)}\left[\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}+\frac{d\mu}{d\tau}\right]d\varepsilon \tag{15}$$

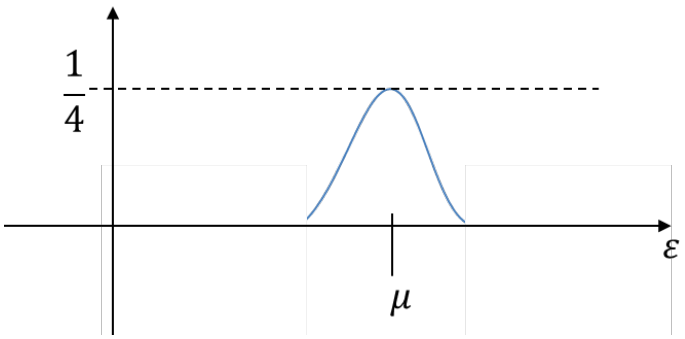
נסתכל על:

$$B\left(\varepsilon\right)\triangleq\frac{1}{\left(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}+1\right)\left(e^{-\left(\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}\right)}+1\right)}=\underbrace{\frac{1}{\left(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}+1\right)}}_{\text{blue}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\left(e^{-\left(\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}\right)}+1\right)}}_{\text{red}} \tag{16}$$

ונצייר את הגרפים (לפי הצבעים):



ולכן נקבל כי המכפלה בין הפונקציות הנ"ל הינה:



אנחנו רוצים למצוא את הרוחב של העקום הנ"ל כאשר האמפליטודה מגיעה לחצי הגובה שלה, כלומר כאשר $B(\varepsilon)=\frac{1}{8}$.
נגדיר $x=e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}$ ואנחנו מחפשים את x שעבורו:

$$\frac{1}{(x+1)\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{8}\Rightarrow x^2-6x+1=0\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{32}}{2}\approx 6 \tag{17}$$

קיבלנו כי $x\approx 6$, כלומר $e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}\approx 6\Leftarrow \frac{\varepsilon-\mu}{\tau}\approx \ln 6\approx 1.75\approx 2$ וקיבלנו: $\varepsilon-\mu=2\tau$ והצד השני סימטרי ולכן $\Delta\varepsilon=4\tau$ = רוחב העקום. לערך 4 אין חשיבות בהמשך התרגיל והוא משמש רק לכתיבה מקוצרת.
נזכר כי אנחנו רוצים לחשב את:

$$0=\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau}B(\varepsilon)\left[\frac{d\mu}{d\tau}+\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}\right]d\varepsilon=\underbrace{\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau}B(\varepsilon)\frac{d\mu}{d\tau}d\varepsilon}_{I}+\underbrace{\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\tau}B(\varepsilon)\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}d\varepsilon}_{II} \tag{18}$$

מתקיים:

$$I=\frac{d\mu}{d\tau}\frac{1}{\tau}\int_0^\infty \varepsilon^{\frac{1}{2}}B(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{19}$$

$$II=\frac{1}{\tau^2}\int_0^\infty \varepsilon^{\frac{1}{2}}(\varepsilon-\mu)B(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{20}$$

אנחנו עושים קירוב של הפונקציה $B(\varepsilon)$ לפונקציה שגובהה $\frac{1}{4}$ ורוחבה 4τ סביב $\varepsilon=\mu$, ואנחנו דוגמים את הפונקציות בנקודות $\mu+\tau\ ,\mu-\tau$ ומכפילים כל דגימה ברוחב שהוא 2τ (ואז עבור שתיהן יחד נקבל רוחב 4τ כנדרש). נקבל:

$$\begin{aligned}I&\cong\left(\frac{1}{4}\sqrt{\mu-\tau}\cdot 2\tau+\frac{1}{4}\sqrt{\mu+\tau}\cdot 2\tau\right)\frac{d\mu}{d\tau}\frac{1}{\tau}=\frac{1}{2}\frac{d\mu}{d\tau}\sqrt{\mu}\left(\sqrt{1-\frac{\tau}{\mu}}+\sqrt{1+\frac{\tau}{\mu}}\right)\overset{(*)}{\approx}\\&=\frac{1}{2}\frac{d\mu}{d\tau}\sqrt{\mu}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\tau}{\mu}+1-\frac{1}{2}\frac{\tau}{\mu}\right)=\frac{d\mu}{d\tau}\sqrt{\mu}\end{aligned} \tag{21}$$

המעבר $(*)$ נובע מהקירוב $\tau \ll \mu$ ומכך שעבור $x \ll 1$ מתקיים $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$.

$$II = \frac{2\tau}{4\tau^2}\left[\sqrt{\mu-\tau}\,(\mu-\tau-\mu)+\sqrt{\mu+\tau}\,(\mu+\tau-\mu)\right] = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{\mu-\tau}+\sqrt{\mu+\tau}\right] = \tag{22}$$
$$= \frac{\sqrt{\mu}}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\tau}{\mu}}-\sqrt{1-\frac{\tau}{\mu}}\right) \approx \frac{\sqrt{\mu}}{2}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\tau}{\mu}-\left(1-\frac{1}{2}\frac{\tau}{\mu}\right)\right] = \frac{\sqrt{\mu}}{2}\frac{\tau}{\mu}$$

נציב את I, II שחישבנו ונקבל:

$$0 = \frac{d\mu}{d\tau}\sqrt{\mu}+\frac{\sqrt{\mu}}{2}\frac{\tau}{\mu} \Rightarrow 0 = \frac{d\mu}{d\tau}+\frac{1}{2}\frac{\tau}{\mu} \Rightarrow \frac{d\mu}{d\tau} = -\frac{\tau}{2\mu} \Rightarrow \left.\frac{d\mu}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0 \tag{23}$$

עבור טמפרטורות נמוכות (גם טמפרטורת החדר נחשבת נמוכה במקרה שלנו) $\frac{\tau}{\mu}$ הינו גודל מאוד קטן ולכן אנחנו אומרים שבטמפרטורת החדר $\frac{d\mu}{d\tau} \approx 0$.
הסיבה הפשוטה לתוצאה הזאת היא שהפונקציה $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ משתנה מאוד לאט ליד μ, הפונקציה $(\varepsilon-\mu)$ אנטי סימטרית סביב μ ו-$B(\varepsilon)$ סימטרית. לכן II הוא בקרוב טוב פשוט אפס. לעומת זאת I חסר את החלק האנטי סימטרי והוא סופי.
ראינו כי:

$$u = \int_0^\infty g(\varepsilon)\,d\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot f(\varepsilon,\tau,\mu) \tag{24}$$

u הוא גודל לא מדיד אבל קיבול חום כן מדיד (נותנים פולס של חום למערכת בלי להשקיע עבודה ומודדים את השינוי בטמפרטורה. בנפח קבוע, כמות החום שאני נותן זה השינוי באנרגיה).

$$u(\tau=0) = const = \int_0^{\varepsilon_f} \varepsilon \cdot g(\varepsilon) \cdot d\varepsilon \tag{25}$$

מכיוון שכאשר $\tau = 0$, f היא פונקצית מדרגה מ-0 עד $\varepsilon_f = \mu(\tau=0)$.
נגדיר:

$$\Delta u = u(\tau) - u(0) \tag{26}$$

כאשר $u(0)$ היא אנרגיית היסוד מ-(25).
ומתקיים $\mu(T) = \varepsilon_f$ ולכן נקבל:

$$\Delta u = \int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon \cdot g(\varepsilon) f(\varepsilon) - \int_0^{\varepsilon_f} d\varepsilon\varepsilon \cdot g(\varepsilon) \tag{27}$$

ועדיין:

$$N = \int_0^\infty d\varepsilon f(\varepsilon) g(\varepsilon) \tag{28}$$

ועבור $\tau = 0$ נקבל:

$$N = \int_0^{\varepsilon_f} g(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{29}$$

ומאחר שהנחנו ש-N קבוע נקבל את השיוויון הבא:

$$\int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon_f \cdot f(\varepsilon) g(\varepsilon) - \int_0^{\varepsilon_f} d\varepsilon\varepsilon_f \cdot g(\varepsilon) = 0 \tag{30}$$

ע"י השוואת (29) ל-(30) והכפלה ב-ε_f. μ בא לידי ביטוי ב-f והוא ידאג לכך שהשיוויון הנ"ל יתקיים (הוא משתנה כפונקציה של הטמפרטורה).

$$\Delta u = \Delta u - \overbrace{\left[\int_0^\infty d\varepsilon \underset{f}{\varepsilon}\cdot f(\varepsilon)\, g(\varepsilon) - \int_0^{\varepsilon_f} d\varepsilon \underset{f}{\varepsilon}\cdot g(\varepsilon)\right]}^{=0} \tag{31}$$

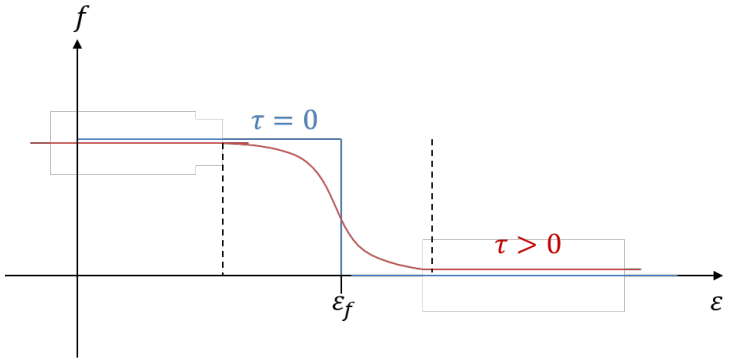
$$= \int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon \cdot g(\varepsilon) f(\varepsilon) - \int_0^\infty d\varepsilon\varepsilon_f \cdot f(\varepsilon) g(\varepsilon) + \int_0^{\varepsilon_f} d\varepsilon\varepsilon_f \cdot g(\varepsilon) - \int_0^{\varepsilon_f} d\varepsilon\varepsilon \cdot g(\varepsilon) \tag{32}$$

$$= \int_0^\infty d\varepsilon (\varepsilon - \varepsilon_f) \cdot g(\varepsilon) f(\varepsilon) - \int_0^{\varepsilon_f} d\varepsilon (\varepsilon - \varepsilon_f) \cdot g(\varepsilon) \tag{33}$$

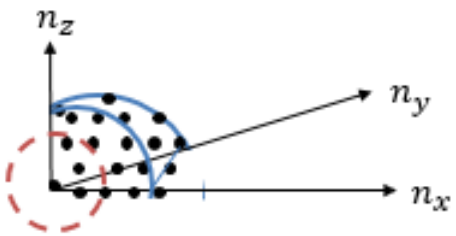
$$= \int_0^{\varepsilon_f} d\varepsilon (\varepsilon - \varepsilon_f) \cdot g(\varepsilon) f(\varepsilon) + \int_{\varepsilon_f}^\infty d\varepsilon (\varepsilon - \varepsilon_f) \cdot g(\varepsilon) f(\varepsilon) - \int_0^{\varepsilon_f} d\varepsilon (\varepsilon - \varepsilon_f) \cdot g(\varepsilon) \tag{34}$$

$$= \int_0^{\varepsilon_f} d\varepsilon (\varepsilon - \varepsilon_f) \cdot g(\varepsilon) [f(\varepsilon) - 1] + \int_{\varepsilon_f}^\infty d\varepsilon (\varepsilon - \varepsilon_f) \cdot g(\varepsilon) f(\varepsilon) \tag{35}$$

נשרטט את $f(\varepsilon)$ עבור $\tau = 0$ ו-$\tau > 0$:



ניתן לראות כי עבור הנקודות שנמצאות מחוץ לקווים המקווקווים (כלומר מימין לקו הימני, ומשמאל לשמאלי) אין כמעט הבדל בין $f(\varepsilon)$ בטמפ' $\tau = 0$ או $\tau > 0$ ולכן נקודות אלו לא יתרמו לשינוי באנרגיה.
נסתכל על מרחב המצבים:



הנקודות אשר נמצאות בתוך העיגול האדום מרגישות את תוספת הטמפרטורה ויש להן אמבט לקחת ממנו אנרגיה, אבל חוק האיסור קובע שהמקומות אליהם הם יכולים להגיע תפוסים ולכן עליית הטמפרטורה לא משפיעה על האלקטרונים באנרגיות נמוכות. כמו כן, ההסתברות למצוא חלקיק מחוץ לרבע הכדור הכחול נמוכה מאוד ולכן רק האלקטרונים שעל השפה, על המעטפת בעובי $4k_BT$ הם אלו שתורמים לשינוי באנרגיה, כל שאר האלקטרונים כאילו לא משתתפים בבעיה. זה מסביר למה קיבול החום במוצקים לא מקיים את משפט החלוקה השווה.
עכשיו נחשב את קיבול החום מ-(35):

$$C = \frac{\partial \Delta u}{\partial \tau} = \int_0^\infty d\varepsilon \left(\varepsilon - \varepsilon_f\right) g\left(\varepsilon\right) \frac{df\left(\varepsilon\right)}{d\tau} \tag{36}$$

נזכר כי אנו עובדים בקרוב ש-μ לא תלוי בטמפרטורה:

$$f\left(\varepsilon\right) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}}+1} \overbrace{=}^{\mu(\tau=0)=\varepsilon_f} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f}{\tau}}+1} \tag{37}$$

ולכן נקבל:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \underbrace{\frac{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f}{\tau}}}{\left(e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f}{\tau}}+1\right)^2}}_{B(\varepsilon)} \cdot \frac{\varepsilon-\varepsilon_f}{\tau^2} \tag{38}$$

$B\left(\varepsilon\right)$ זאת פונקציה עם תומך קטן ליד ε_f. ראינו כי $g\left(\varepsilon\right) \sim \sqrt{\varepsilon}$ והשיפוע שלו הולך וקטן ככל שהאנרגיה גדלה. ולכן אנחנו מניחים שעבור ε גדול מאוד אנחנו נראה אותו כמעט כקבוע. מאחר ש-$B\left(\varepsilon\right)$ דוגם באיזור קטן סביב ε_f אז ניקח את הערך הקבוע להיות $g\left(\varepsilon_f\right)$ והוצאנו אותו מחוץ לאינטגרל.

נציב את זה חזרה ונקבל:

$$C = g\left(\varepsilon_f\right) \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\left(\varepsilon-\varepsilon_f\right)^2}{\tau^2} \frac{e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f}{\tau}}}{\left(e^{\frac{\varepsilon-\varepsilon_f}{\tau}}+1\right)^2} \tag{39}$$

נבצע החלפת משתנים:

$$x = \frac{\varepsilon-\varepsilon_f}{\tau} \Rightarrow \frac{dx}{d\varepsilon} = \frac{1}{\tau} \tag{40}$$

נציב ונקבל:

$$C = g\left(\varepsilon_f\right)\tau \overbrace{\int_{-\infty}^\infty dx \frac{x^2 e^x}{\left(e^x+1\right)^2}}^{=\frac{\pi^2}{3}} = \frac{\pi^2}{3}\tau \cdot g\left(\varepsilon_f\right) \tag{41}$$

כאשר לקחנו את $\frac{-\varepsilon_f}{\tau}$ להיות $-\infty$. כעת אנחנו צריכים למצוא את $g\left(\varepsilon_f\right)$. נזכר כי מצאנו ש:

$$g\left(\varepsilon\right) = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{2\pi^2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{42}$$

כאשר m היא מסת החלקיק, V הוא הנפח.

$$\Rightarrow g\left(\varepsilon_f\right) = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{2\pi^2} \frac{\varepsilon_f^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon_f} \tag{43}$$

כמו כן לפי הגדרת ε_f:

$$\varepsilon_f = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n_f^2 \tag{44}$$

וראינו:

$$n_f^3 = \frac{3N}{\pi} \tag{45}$$

סה"כ נקבל:

$$\varepsilon_f^{\frac{3}{2}} = \frac{\hbar^3}{(2m)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\pi}{L}\right)^3 n_f^3 = \frac{\hbar^3}{(2m)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\pi}{L}\right)^3 \frac{3N}{\pi} \tag{46}$$

$$\Rightarrow g\left(\varepsilon_f\right) = \frac{3}{2}\frac{N}{\varepsilon_f} \tag{47}$$

נציב את זה ב-C_V שקיבלנו:

$$C = \frac{\pi^2}{3}\tau \cdot g\left(\varepsilon_f\right) = \frac{\pi^2}{3}\tau\frac{3}{2}\frac{N}{\varepsilon_f} = \frac{\pi^2}{2}N\frac{\tau}{\varepsilon_f} = \frac{\pi^2}{2}Nk_B\frac{T}{\varepsilon_f} \tag{48}$$

עבור המקרה של חלקיקים בקופסה בטמפרטורות גבוהות ראינו:

$$C_V = \frac{3}{2}Nk_B \tag{49}$$

בתוצאה שקיבלנו כאן קיבול החום של האלקטרונים קטן בפקטור $\frac{\tau}{\varepsilon_f}$ (שהינו גודל קטן מאוד) המצופה ממשפט חלוקה שווה. אנו רואים שאלקטרונים בקושי תורמים לקיבול החום. זה יותר מתאים לניסיון.

הרצאה 21 - בוזונים וקוונדנסציית בוז - אינשטיין

קונדנסציה היא עיבוי (הצטברות). למשל, אם יש לנו בקבוק שמילאנו בו מים קרים כאשר חם בחוץ יופיעו עליו טיפות, הופעת הטיפות הינה עיבוי בדומה לתמונה הבאה:



פריצת הדרך הגדולה ביותר הנושא זה נעשתה ע"י:
$Cohen - Tannoudji, SteveChu, WilliamPhilips$.
ב-1977 קיבלו נובל על cooling Lazer.
מהו cooling Lazer?
באטום יש רמות אנרגיה. מכוונים לייזרים אל הגז כך שבכוונה התדר שלו שונה במעט מהפרשי האנרגיה בין רמות של אטום במנוחה. הלייזרים נשלחים משני צדדים בצורה הבאה:



כאשר האטומים בצורת גז הם נעים חלקם מהר חלקם לאט. נניח שאנחנו יושבים על אטום שזז ימינה מהר. מבחינת האטומים הלייזר מתקרב אליהם ולכן התדר שלו מוסח לפי דופלר. דהיינו התדר של הלייזר גדל, כלומר הפוטון נקלט אבל רק ע"י האטומים שנעים מהר. וביצענו תהליך דומה להתנגשות בין פוטון לאטום. זה גורם לעצירה של אטומים הנעים במהירות לכיוון הלייזר. הצליחו באמצעות כך להגיע לטמפרטורה של $500\mu K$.

ב-2001, W.ketterle K.Wiemann, E.Cornell ביצעו cooling Evaporative.
מהו cooling Evaporative?

נחשוב על כוס עם נוזל חם. אנחנו יודעים כי החום גורם לכך שהנוזל מתחיל להתאדות. אם אנחנו נושפים על הגז שמתאדה ומזיזים אותו זה מפנה מקום להיווצרות של אדים נוספים וכך הנוזל מתקרר מהר יותר. הבעיה היא שבאופן זה אנחנו מפסידים אטומים במערכת. הבעיה היא להצליח לקרר את המערכת בלי לאבד את כל האטומים בה.
ב-cooling Evaporative מנצלים את הספין/מומנט מגנטי של האטום. מחזיקים גז אם ספינים בשדה מגנטי סטטי. השדה מהווה מלכודת לגז עבור ספינים בכיוון השדה. ראינו את זה בשיעור על ורטקסים. מקרינים על הגז במיקרו גל. ההקרנה גורמת להיפוך ספינים וכל אטום שהספין שלו התהפך רואה עכשיו את המלכודת כדוחה במקום מושכת. ע"י בחירה נכונה של פרמטרים אפשר להרחיק מהגז את האטומים המהירים. הצליחו להגיע באמצעות כך לטמפרטורה של $170nK$ וזוהי הטמפרטורה שבה מתרחש עיבוי בוז- אינשטיין.

באופן זה הצליחו להגיע לעיבוי בוז-אינשטיין באופן נשלט (דבר אשר לא הצליחו לעשות לפני כן).

<u>עיבוי בוז איינשטיין</u>
מנקודת מבט תרמודינמית ראינו: $F = u - \tau\sigma$ ואמרנו כי במצב שיווי משקל המערכת תגיע למינימום של F. בטמפרטורה 0 נקבל ש-$F = u$ ואז המערכת תחפש את המינימום של האנרגיה. זה אומר שכל האטומים מסוג בוזונים יהיו ברמת היסוד.
מנקודת מבט סטטיסטית עבור אטומים מסוג בוזונים בגבול של טמפרטורה אפס:

$$N = \lim_{\tau\to 0}\sum_{\varepsilon}\frac{1}{e^{\frac{(\varepsilon-\mu)}{\tau}}-1} = \langle N\rangle_{\text{יסוד}} \tag{1}$$

כל רמה שאינה רמה היסוד בטמפרטורה מאוד קטנה תורמת 0 למספר חלקיקים.
במקרה זה מותר לנו לשים הרבה חלקיקים ברמת היסוד ולכן בטמפרטורה 0 כל החלקיקים יהיו ברמת היסוד. השאלה היא איך לוקחים את הגבול $\tau \to 0$.

לטובת נוחות נספור את האנרגיות החל מ-0. בגבול של טמפרטורה אפס אנחנו מצפים לקבל תרומה רק מהאיבר הראשון בסכום, ובהנחה שלרמת היסוד יש אנרגיה אפס:

$$N = \frac{1}{e^{-\frac{\mu}{\tau}} - 1} \tag{2}$$

כאשר N מאוד גדול השוויון יתקיים רק אם $e^{-\frac{\mu}{\tau}} \to 1 \Leftarrow \frac{\mu}{\tau} \to 0$. נניח ש-$|\frac{\mu}{\tau}| \ll 1$ ונפתור את הבעיה בקירוב ונקבל:

$$N = -\frac{\tau}{\mu} \Rightarrow \mu = -\frac{\tau}{N} \tag{3}$$

למשל, עבור $N = 10^{22}\ , T = 1K$ נקבל $\mu = -10^{-22}k_BK$ ועבור $T = 1mK$ עם אותו מספר חלקיקים נקבל $\mu = -10^{-25}k_BK$.

ניקח אטומים בקופסא ונשאל מהי האנרגיה ברמה המעוררת עבור הליום? (הליום הוא קירוב טוב לגז אידאלי ללא אינטראקציות).
עבור הליום בקופסא מתקיים כי האנרגיה של הרמה המעוררת הראשונה ביחס לרמה היסוד הינה:

$$\varepsilon_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left[\left(2^2+1^2+1^2\right) - \left(1^2+1^2+1^2\right)\right] = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 3 \tag{4}$$

(נזכר כי $(n_x, n_y, n_z \neq 0$).
נעזר בנתונים:

$$m_p \cong m_n \cong 2000 m_e \tag{5}$$

$$m_e \cong 0.5 MeV \tag{6}$$

ניקח $L = 1cm = 10^8 \mathring{A}$
ונקבל:

$$\varepsilon_1 = \frac{\hbar^2 c^2}{2mc^2}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 3 = 3\frac{\left(2000eV\cdot\mathring{A}\right)^2}{2\times 4\cdot 10^9 eV}\left(\frac{\pi^2}{10^{16}\mathring{A}^2}\right)\cdot 11600\frac{k_B}{eV}K = 1.8\cdot 10^{-14}k_B\ K \tag{7}$$

מסקנה $\mu \ll \epsilon_1$. לכן מעכשיו באיבר הראשון בסכימה (33) חייבים לשמור את μ ובאיברים הבאים אפשר להזניח את μ.

אבל זה מייצר לנו בעיה: אם אנחנו מנסים לעבוד בשיטה שבה עבדנו עד עכשיו ולבצע מעבר מסכימה לאינטגרציה עשינו:

$$N = \int_0^\infty g(\varepsilon) f(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{8}$$

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{V}{2\pi^2}\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

ה-$\frac{1}{2}$ כי בפרמיונים הכפלנו את צפיפות המצבים פי 2 בגלל הספין.
כאשר $g(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ אז נקבל שהתרומה של האנרגיה 0 לאינטגרל היא 0. כלומר קיבלנו שבמעבר מסכימה לאינטגרציה אנחנו מתעלמים מכמות גדולה של חלקיקים. איך נתקן זאת?
נתקן את המעבר מסכימה לאינטגרציה:

$$N = \overbrace{f(0,\tau)}^{N_0} + \overbrace{\int_{\varepsilon_1}^\infty g(\varepsilon) f(\varepsilon)\, d\varepsilon}^{N_e} \tag{9}$$

ונגדיר:

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\frac{\mu}{\tau}} - 1}, \quad N_e = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\int_{\varepsilon_1}^\infty \varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}} - 1}d\varepsilon \tag{10}$$

(e=excited) עבור N_e אפשר להזניח את μ כי האינטגרציה מתחילה מאנרגיה הגדולה מ-μ.
נבצע החלפת משתנים ל:

$$x = \frac{\varepsilon}{\tau}$$

בנוסף, $\frac{\varepsilon_1}{\tau}$ הוא מספר קרוב מאוד ל-0 ולכן נוכל לרשום את הקירוב:

$$N_e(\tau) = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\tau^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{e^x-1}dx = \frac{2^{\frac{3}{2}}V}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 1.3\pi^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

כמובן שעבור חישוב N_0 חייבים לשמור את μ, אם מציבים $\mu = 0$ מקבלים התבדרות.

לאחר שפתרנו את האינטגרל קיבלנו מספר כלשהו עבור $N_e(\tau)$ שאינו תלוי ב-N. N_e הוא המספר המקסימלי של חלקיקים שיכולים להיות ברמות המעוררות והוא תלוי בטמפרטורה, מסה ונפח, זהו מספר שלא תלוי במספר החלקיקים שהכנסנו לקופסא. אם הכנסתי לקופסא N חלקיקים כך ש-$N > N_e$ אז כל שאר החלקיקים ילכו ל-N_0.

למה זה מגניב: החלקיקים ברמת היסוד הם ללא אנרגיה, הם לא יכולים למסור אנרגיה בהתנגשות כי אין להם לאן לדעוך. הם כמו האלקטרונים ברמת היסוד של אטום. שנעים לעד ללא הפרעה. וחלקיקים ברמת היסוד אין חיכוך והם הופכים להיות נוזל על. אם ניקח הליום נוזלי בטמפרטורה מספיק נמוכה, נכניס לצינור סגור על עצמו וניתן דחיפה ההליום ינוע בסיבוב לעד. עבור מים או כל נוזל אחר זה לא יקרה. התנועה של מים תיעצר. הליום גם יכול לעבור דרך חורים שנוזלים אחרים לא יכולים לעבור בהם. כל אלו הן תופעות על נוזליות. הסבר מלא שלהם דורש הוספת אינטראקציות ויש לנו קורס שלם בנושא על-מוליכות ועל-נוזליות.

נזכר כי הגדרנו צפיפות עצמית של חלקיקים: $n_Q = \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ ונקבל:

$$N_e = 2.6\cdot n_Q V \tag{12}$$

נסתכל שוב על (10). ככל ש-μ קרוב יותר לאפס (מהצד השלילי) אז N_e יגדל וככל ש-μ רחוק יותר מאפס (מהצד השלילי) אז N_e יקטן. N_e זאת פונקציה יורדת של $|\mu|$, היא הכי גדולה ב-$\mu = 0$. המקסימום של N_e מתקבל כאשר $\mu = 0$. אם אשים פחות חלקיקים מאשר N_e אז μ כבר לא יהיה זניח. ולכן (12) זה מקסימום חלקיקים שיכולים להיות ברמות המעוררות. אם נשים פחות חלקיקים מ-N_e אז μ יתרחק מהאפס ($\mu < 0$), ואם נשים יותר חלקיקים מ-N_e אז מאחר ש-μ לא יכול לגדול מעל אפס אז הוא יהיה מאוד קרוב לאפס כך שאפשר להזניח אותו באינטגרל, וכל שאר החלקיקים ילכו ל-N_0.

אכלוס מיקרוסקופי של רמת היסוד יחל כאשר תוך כדי קירור יתקיים $N = 2.6\cdot n_Q V$.

יש טמפרטורה שמקיימת את השוויון הנ"ל ואם אנחנו מקררים מתחת לטמפרטורה הזאת אז חלקיקים יכנסו לרמת היסוד. אנחנו רוצים למצוא את הטמפרטורה שבה זה יקרה (נסמן אותה τ_E):

$$\frac{N}{V} = \left(\frac{m\tau_E}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 2.6 \tag{13}$$

$$\Rightarrow \tau_E = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\left(\frac{n}{2.6}\right)^{\frac{2}{3}},\quad n = \frac{N}{V} \tag{14}$$

n הינה צפיפות החלקיקים. דרך אחרת לכתוב את אותה התוצאה:

$$n = \frac{N}{V} = 2.6 n_Q \tag{15}$$

כאשר n_Q היא הצפיפות העצמית של החלקיקים. נזכר בהגדרה של n_Q משעור 13:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2.6}\frac{1}{n_Q} \tag{16}$$

$$\frac{1}{n_Q} = (\text{נפח עצמי}) = \lambda^3$$

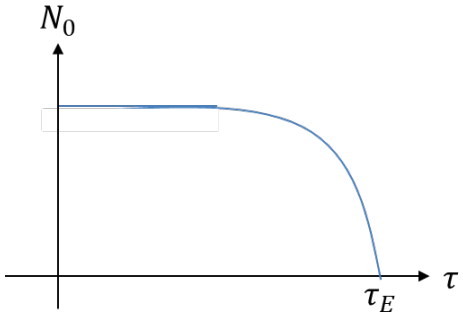
λ^3 מייצגת את הנפח שבו החלקיק חי. $\Leftarrow$ לכל חלקיק יש נפח עצמי. דרך לחשוב על תופעת עיבויי בוז-איינשטיין היא שכאשר הנפח העצמי זהה לנפח שיש לכל חלקיק בקופסה $\frac{V}{N}$ החלקיקים מתחילים לגעת אחד בשני אז תופעת העיבוי קורית. למרות זאת תופעה העיבוי קורת ללא אינטראקציות.

כעת מעניין אותנו איך מתנהג מספר החלקיקים ברמת היסוד, כמה חלקיקים יש ברמת היסוד:

$$N_0 = N - N_e = N\left(1 - \frac{N_e}{N}\right) = N\left(1 - 2.6 \cdot n_Q \overbrace{\frac{V}{N}}^{=\frac{1}{n}}\right) = N\left(1 - 2.6\frac{n_Q}{n}\right) = \tag{17}$$

$$= N\left(1 - 2.6\frac{\left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{m\tau_E}{2m\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2.6}\right) = N\left(1 - \left(\frac{\tau}{\tau_E}\right)^{3/2}\right)$$

כאשר השתמשנו ב-(13) הפוך [τ_E מגדיר את N].
קיבלנו כי:



לתופעות שבהן יש טמפרטורה מיוחדת שמעליה לא קורה כלום, ומתחתיה יש מצב חדש של החומר אנחנו קוראים שינוי פאזה.

התופעה הזאת של קונדנסציית בוז-אינשטיין זה מעבר הפאזה היחיד שאנחנו מכירים שלא נובע מאינטראקציות. הסיבה שבגללה המעברים האלה קורים היא שרמות האנרגיה דיסקרטיות. בלי רמות אנרגיה דיסקרטיות התופעה הזאת לא הייתה קורת. זאת הוכחה לקיום רמות אנרגיה דיסקרטיות לא באטום.

נחשב תוצאה ניסיונית מצופה, קרי קיבול חום.

<u>אנרגיה ממוצעת וקיבול חום כאשר $\tau \leq \tau_E$</u>:
כאשר $\tau < \tau_E$ יש המון חלקיקים במצב היסוד אבל הם לא תורמים לאנרגיה, את תרומת החלקיקים מהרמות הגבוהות ואנחנו סוכמים עם הקרוב $\mu = 0$.
ולכן נקבל:

$$u = N_0 \overbrace{\varepsilon_0}^{=0} + u_e = u_e = \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \varepsilon \cdot g(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon}{e^{\varepsilon/\tau} - 1} d\varepsilon \tag{18}$$

נבצע החלפת משתנים:

$$x = \frac{\varepsilon}{\tau} \Rightarrow \tau dx = d\varepsilon \tag{19}$$

ונקבל:

$$u = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{(x\tau)^{\frac{3}{2}}}{e^x - 1} \tau dx = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{4\pi^2} \tau^{\frac{5}{2}} \overbrace{\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{e^x - 1} dx}^{\approx\sqrt{\pi}} = \left(\frac{2m}{\hbar^2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{4} \tau^{\frac{5}{2}} \tag{20}$$

$$\Rightarrow C_V = \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_V = \frac{5}{2}\left(\frac{2m}{\hbar^2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{4} \tau^{\frac{3}{2}} \tag{21}$$

מה שחשוב זאת החזקה. וקיבלנו תוצאה שונה ממה שקיבלנו עבור פרמיונים.

אנרגיה ממוצעת וקיבול חום כאשר $\tau > \tau_E$:
אנחנו לא יכולים להניח ש-$\mu = 0$ כי N_e לא מלא. במקרה זה $\mu = \mu(\tau)$. נבדוק איך הוא מתנהג קרוב מאוד ל-τ_E. עושים תכסיס מתמטי (אין לנו אינטואיציה אליו, מישהו עשה את זה וזה הצליח):
למרות שבטמפרטורה הנידונה $\mu \neq 0$ נגדיר:

$$N_* = N_e(\mu = 0) = \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) \frac{1}{e^{\varepsilon/\tau} - 1} = 2.6 \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot V \tag{22}$$

$$n_* = \frac{N_*}{V} = 2.6 \cdot n_Q(\tau) \tag{23}$$

$$\begin{aligned} n_* - n &= \frac{1}{V} \int d\varepsilon g(\varepsilon) \left[\frac{1}{e^{\varepsilon/\tau} - 1} - \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/\tau} - 1}\right] = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{\left(e^{-\mu/\tau} - 1\right) e^{\varepsilon/\tau}}{\left(e^{\varepsilon/\tau} - 1\right)\left(e^{(\varepsilon-\mu)/\tau} - 1\right)} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon = \\ &= \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4\pi^2} \left(e^{-\mu/\tau} - 1\right) \int_0^\infty \frac{e^{\varepsilon/\tau}}{\left(e^{\varepsilon/\tau} - 1\right)\left(e^{(\varepsilon-\mu)/\tau} - 1\right)} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \end{aligned} \tag{24}$$

זהו אינטגרל שאנחנו לא יודעים לפתור אלא כאינטגרל של טור ולכן נפתור אותו סביב הראשית ונשמור איבר ראשון.

$$n_* - n \cong \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{\mu}{\tau}\right) \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\frac{\varepsilon(\varepsilon-\mu)}{\tau^2}} = -\mu \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \tau \underbrace{\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\varepsilon - \mu)}}_{= \frac{\pi}{\sqrt{-\mu}}} = \sqrt{-\mu} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \tau \tag{25}$$

אברים הבאים יהיו חזקות גבוהות יותר של $\sqrt{-\mu}$. נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל:

$$(n_* - n)^2 = -\mu \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^3 \tau^2 \Rightarrow \mu = -(n_* - n)^2 2\pi^2 \left(\frac{\hbar^2}{m}\right)^3 \frac{1}{\tau^2} \tag{26}$$

קיבלנו הערכה ל-μ כפונקציה של τ. נביע את צפיפות החלקיקים באמצעות הגודל τ_E ונמשוך את n אל מחוץ לסוגריים ואז ע"י:

$$n_* = 2.6 n_Q \tag{27}$$

$$n_Q = \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{28}$$

$$n = 2.6 \left(\frac{m\tau_E}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{29}$$

$$\Rightarrow \mu = -\left[2.6 \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2 \frac{\tau}{4\pi} \tag{30}$$

בפרמיונים עבדנו קשה כדי להראות ש-μ לא תלוי ב-τ אבל כאן הוא כן תלוי.
באופן דומה נגדיר גודל עזר (למרות שאנחנו לא ב-$\mu = 0$) לפי (20):

$$E_* = E(\mu = 0) = u(\tau) \tag{31}$$

$$E_* - E = \int d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon) \left[\frac{1}{e^{\varepsilon/\tau} - 1} - \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/\tau} - 1} \right] = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \underbrace{\left(e^{-\mu/\tau} - 1 \right)}_{\approx -\mu/\tau} \int_0^\infty \varepsilon^{\frac{3}{2}} \frac{e^{\varepsilon/\tau}}{\left(e^{\varepsilon/\tau} - 1 \right) \left(e^{(\varepsilon-\mu)/\tau} - 1 \right)} d\varepsilon \tag{32}$$

שוב קיבלנו אינטגרל שאנחנו לא יודעים לפתור. אנו מעוניינים בחישוב בסדר ראשון ב-μ. לכן נחשב את האינטגרל בסדר אפס ע"י שנציב $\mu = 0$.
נבצע החלפת משתנים:

$$x = \varepsilon/\tau \tag{33}$$

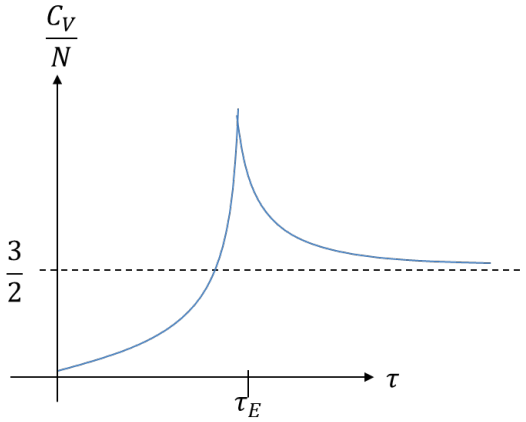
$$E_* - E = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{\mu}{\tau} \right) \tau^{\frac{5}{2}} \underbrace{\int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} \frac{e^x}{\left(e^x - 1 \right)^2} dx}_{3.47} = 3.47 \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} (-\mu) \tau^{\frac{3}{2}} \tag{34}$$

$$E = E_*(\tau) + 3.47 \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \mu(\tau) \tau^{\frac{3}{2}} \tag{35}$$

מ (20) $E_*(\tau) = \left(\frac{2m}{\hbar^2 \pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{2} \tau^{\frac{5}{2}}$ ומ-(30) $\mu = -\left[2.6 \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^2 \frac{\tau}{4\pi}$

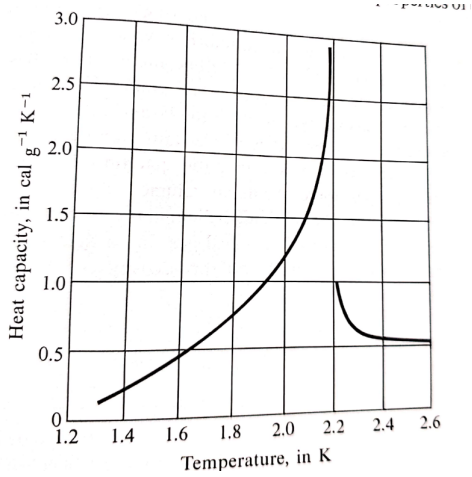
$$C_V = \left[1.63 + 0.4 \left(\frac{\tau_E}{\tau} \right)^{\frac{3}{2}} + 0.11 \left(\frac{\tau}{\tau_E} \right)^{\frac{3}{2}} \right] N k_B \tag{36}$$

כאשר ביטוי זה מתאר רק את ההתנהגות ליד τ_E. אפשר למדוד התנהגות זאת בהליום איכן ש-$T_E = 2.2K$:



אנו מצפים ש-$C_V \overset{\tau \to \infty}{\to} \frac{3}{2} N$ בגלל שאנו עוברים להתפלגות מקסוול בולצמן בה יש פחות מחלקיק ברמה וגם פרמיונים וגם בוזונים מתנהגים כמו הגז האידאלי בו דנו עד בעבר.

כל מה שחשוב הוא להוכיח שקיבול החום מימין ומשמאל ל-τ_E הם **לא** בעלי אותה התנהגות. זה לא קרה בפרמיונים. בניסוי עצמו יש אי רציפות בין הצד הימני לשמאלי (בשונה מהתיאוריה). ראו גרף 7.12 בקיטל. אנחנו משייכים זאת לאינטראקציות. אבל הקירבה בין הניסוי לתאוריה ללא אינטראקציות מסמלת שיש לנו נקודת פתיחה טובה.



מסקנה: יש בוזונים בעולם שהם לא פוטונים. לפוטונים יש $\mu = 0$, פוטונים הם בוזונים חסרי מסה ועכשיו מצאנו בוזונים בעלי מסה.

הרצאה 22 - תהליכים

<u>חזרה על עיבויי בוז- אינשטיין</u>
דנו בגז בוזוני ב-3D. ברור שב $\tau = 0$ כל החלקיקים חייבים להיות ברמת היסוד ϵ_0. השאלה היא, מה קורה תוך כדי קרור?

$$N = \lim_{\tau \to 0} \sum_{\varepsilon} \frac{1}{e^{\frac{(\varepsilon - \mu)}{\tau}} - 1} \tag{1}$$

לפי הערכה של μ בטמפרטורה נמוכה, אבל נגישה ניסיונית, $T = 1mK$ עם $N = 10^{22}$ נקבל $\mu = -10^{-25} k_B K$, $\epsilon_1 = 1.8 \cdot 10^{-14} k_B\ K$. בגלל שסופרים אנרגיה מ-0, ובגלל שהאנרגיה הראשונה השונה מאפס מקימת $\epsilon_1 \gg -\mu$ מקבלים ש:

$$N = \overbrace{f(0,\tau)}^{N_0} + \overbrace{\int_{\varepsilon_1}^{\infty} g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon}^{N_e} \tag{2}$$

ונגדיר:

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\frac{\mu}{\tau}} - 1}, \quad N_e = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{\tau}} - 1} d\varepsilon \tag{3}$$

N_e זאת פונקציה יורדת של $|\mu|$, היא הכי גדולה ב-$\mu = 0$. בטמפרטורה מספיק נמוכה אפשר להציב ב-N_e $\mu = 0$. בניסוי $\frac{\varepsilon_1}{\tau}$ הוא מספר קרוב מאוד ל-0 ולכן נוכל לרשום את הקירוב:

$$N_e(\tau) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \tau^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{e^x - 1} dx = 2.6 \cdot n_Q V \tag{4}$$

$$n_Q = \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

מגדירים τ_E דרך $N_e(\tau) = N$:

$$\frac{N}{V} = \left(\frac{m\tau_E}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2.6 \tag{5}$$

$$\Rightarrow \tau_E = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left(\frac{n}{2.6}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad n = \frac{N}{V} \tag{6}$$

דרך אחרת לכתוב את אותה התוצאה:

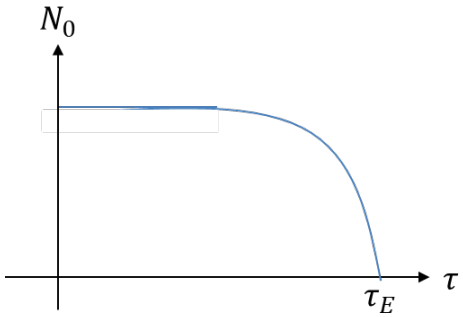
$$n = \frac{N}{V} = 2.6 n_Q(\tau_E) \tag{7}$$

כאשר n_Q היא הצפיפות העצמית של החלקיקים. אם צפיפות החלקיקים גדולה מהצפיפות העצמית חלקיקים חייבים לאכלס את רמת היסוד.

כמה חלקיקים יש ברמת היסוד?

$$N_0 = N - N_e = N\left(1 - \left(\frac{\tau}{\tau_E}\right)^{3/2}\right) \tag{8}$$

כאשר השתמשנו ב-(5) הפוך [τ_E מגדיר את N]. קיבלנו כי:



<u>אנרגיה ממוצעת וקיבול חום כאשר $\tau \leq \tau_E$:</u>
כאשר $\tau < \tau_E$ יש המון חלקיקים במצב היסוד אבל הם לא תורמים לאנרגיה, את תרומת החלקיקים מהרמות הגבוהות ואנחנו סוכמים עם הקרוב $\mu = 0$.
ולכן נקבל:

$$u = N_0 \overbrace{\varepsilon_0}^{=0} + u_e = u_e = \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \varepsilon \cdot g(\varepsilon) \cdot f(\varepsilon)\, d\varepsilon = \left(\frac{2m}{\hbar^2 \pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{4} \tau^{\frac{5}{2}} \tag{9}$$

$$\Rightarrow C_V = \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)_V = \frac{5}{2} \left(\frac{2m}{\hbar^2 \pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{4} \tau^{\frac{3}{2}} \tag{10}$$

<u>אנרגיה ממוצעת וקיבול חום כאשר $\tau > \tau_E$:</u>
אנחנו לא יכולים להניח ש-$\mu = 0$ כי N_e לא מלא. אין לנו עודף חלקיקים שחייבים להיות ברמת היסוד. במקרה זה $\mu = \mu(\tau)$.
במקרה זה רמת היסוד היא לא מיוחדת ולא מופרדת מחברותיה המעורערות. לכן:

$$N = N_e = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{\tau}} - 1} d\varepsilon$$

צריך מפה לחלץ את μ. עושים תכסיס מתמטי ומביעים את N בעזרת τ_E ומקבלים:

$$\mu = -\left[2.6 \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2 \frac{\tau}{4\pi} \tag{11}$$

עכשיו צריך לחשב אנרגיה גם פה עושים תכסיס מתמטי. מגדירים

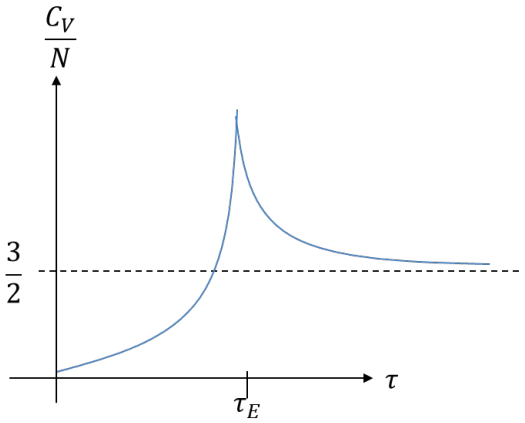
$$E_*(\tau) = \left(\frac{2m}{\hbar^2 \pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{V}{4} \tau^{\frac{5}{2}}$$

ומקבלים:

$$E = \int d\varepsilon \varepsilon \cdot g(\varepsilon) f(\varepsilon) = E_*(\tau) + 3.47 \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \mu(\tau) \tau^{\frac{3}{2}} \tag{12}$$

$$C_V = \left[1.63 + 0.4 \left(\frac{\tau_E}{\tau}\right)^{\frac{3}{2}} + 0.11 \left(\frac{\tau}{\tau_E}\right)^{\frac{3}{2}}\right] N k_B \tag{13}$$

מצאנו את ההתנהגות ליד ומעל τ_E. כמו כן אנו צפים ש-$C_V \overbrace{\rightarrow}^{\tau \to \infty} \frac{3}{2} N$ לכן:



תהליכים
לחוק השני של התרמודינמיקה יש הרבה ניסוחים:

ניסוח שהתחלנו איתו: רוב הסיכויים שהאנטרופיה של מערכת מבודדת שאינה בש"מ תגדל. המילה מערכת מתייחסת לכל החומרים הנידונים יחד עם כל סוגי האמבטים אליהם הם מצומדים. בקירוב תרמודינמי "רוב הסיכויים" הופך ל-100% סיכוי.

ניסוח אחר:

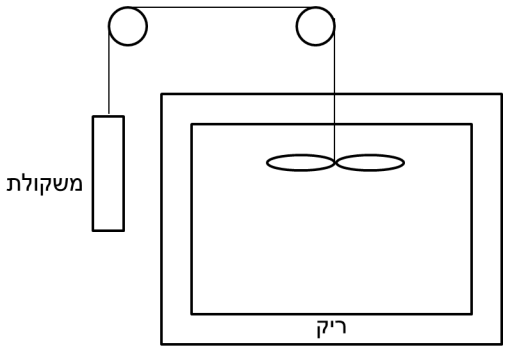
$$\dot{S} \geq 0 \tag{14}$$

המשמעות של כך היא שהאנטרופיה (של כל העולם) תמיד גדלה או לא משתנה ככול שחולף הזמן.

ניסוח שלישי הוא שאי אפשר להפיק עבודה מחזורית ממקור חום אחד (נסביר בהמשך).

החוק השני אומר שאם עשינו תהליך (למשל דחיסת גז) שכתוצאה ממנו האנטרופיה של העולם עלתה, התהליך לא הפיך. למשל, אם הזזתי בוכנה וכתוצאה מכך האנטרופיה של העולם עלתה, כאשר הבוכנה תנסה לחזור הגז לא יחזור למצבו הקודם. אם כן אז בחזור האנטרופיה של העולם תרד.
תהליכים לא הפיכים מול הפיכים:

תהליך לא הפיך מכני



אין זרימה של חום מהמערכת פנימה או החוצה. אם המשקולת יורדת זה גורם לשבשבת להסתובב. בגלל שהשבשבת מזיזה את האוויר, העבודה שהיא עשתה תעניק אנרגיה לגז ותעלה את האנטרופיה, אפילו שלא זרם חום מבחוץ (או מבפנים ע"י נגד). המערכת לא משנה לבד פרמטר פנימי כדי להגיע לשיווי משקל ולכן מתקיים:

$$d\sigma_{int} = \frac{du}{\tau} \tag{15}$$

כאשר du הינה האנרגיה הפוטנציאלית של המשקולת. למרות שיש לנו ריק סביב המיכל ונראה כאילו שהאנטרופיה קבועה, זה לא נכון כי יש חיכוך עם האויר. זאת דוגמא שהאנטרופיה יכולה לעלות גם ללא כניסת חום מהסביבה, ללא התפשטות, וללא נגד חם. אי ההפיכות תבוא לידי ביטויי בזה שגם אם המשקולת תפגע בקפיץ בתחתית, היא לא תעלה לגובה ממנו התחילה. אי אפשר לקבל את העבודה חזרה והעבודה כזאת נקראת עבודה בלתי הפיכה dW_{irrev}. במערכות עם חיכוך $dW_{irrev} > -PdV$. כאן $-PdV$ מייצג את כל סוגי העבודות. יש עבודה מגנטית וחשמלית שנעשית ע"י שינויי שדה.
התפשטות לא הפיכה של גז
נניח גז אידאלי בצד אחד של בוכנה מבודדת טרמית ומצד השני וקום. הבוכנה מוחזקת בכוח במקומה ואז משוחררת. הגז יתרחב בצורה לא נשלטת. זה שונה מהמקרה של התפשטות גז במקרר Joule-Thomson שעשיתם בתרגיל כיתה שבו הגז התפשט דרך חריר והיו לחצים מוגדרים משני צידי החריר. במקרה זה של התפשטות לתוך ריק הגז לא עושה עבודה וחום לא זורם לשום מקום. הגז פשוט מתפשט באופן בלתי נישלט.

ניזכר ש:

$$n = \frac{N}{V}, \quad n_Q = \left(\frac{m\tau}{2\pi\hbar}\right)^{3/2}$$

$$\sigma = N\left[\ln\left(\frac{n_Q}{n}\right) + \frac{5}{2}\right] = N\left[\ln\left(\tau^{3/2}V\right) + const\right]$$

$$PV = N\tau, \quad u = \frac{3}{2}N\tau$$

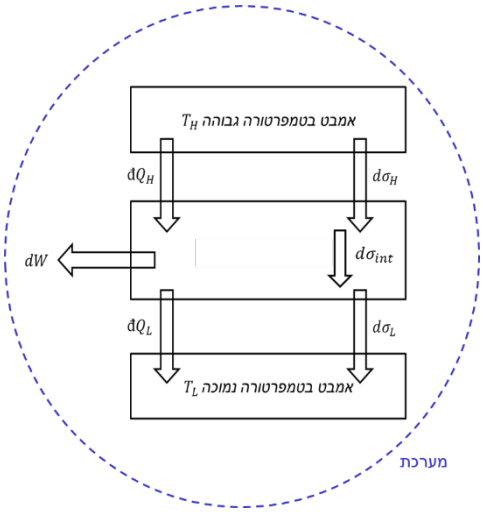
מכאן ש:

$$\sigma = N\left[\ln\left(u^{3/2}V\right) + const\right] \tag{16}$$

האנרגיה נשארת קבועה ועקב גידול הנפח האנטרופיה גדלה. אבל במקרה זה אין חיכוך. גידול באנטרופיה יכול לקרות בגלל שהגז שואף למקסימום אנטרופיה ע"י שינוי פרמטר פנימי גם כשהאנרגיה קבועה. במקרה זה $dQ_{irrev} < \tau ds$.

נגדיר מושג חדש: תהליך הפיך. תהליך הפיך $\Leftrightarrow$ אנטרופיה (של כל העולם) קבועה במהלך התהליך.

נסתכל על מערכת שמתארת מנוע: המילה מערכת בציור שוב מתייחסת לכל חלקיו, כולל שני האמבטים, ולא רק לחלק האמצעי.



תפקיד המערכת הוא להוציא עבודה.
אם אנחנו רוצים שהתהליך יהיה הפיך עלינו לדרוש שהאנטרופיה של כל המערכת תהיה קבועה, זה מתקבל כאשר האנטרופיה שעוברת מאמבט העליון לחלק האמצעי = אנטרופיה שיוצאת מהחלק האמצעי לאמבט התחתון, ולכן נדרוש:

$$d\sigma_H = d\sigma_L \tag{17}$$

אמבטים לא מזרימים חום לשום מקום מלבד למנוע. לעומת זאת <u>בעקרון</u> המנוע יכול ליצר אנטרופיה (דרך חיכוך ואו תהליך לא הפיך כמו התפשטות בלתי נשלטת) של גז. אבל באופן אידאלי המנוע מייצר רק עבודה ולא מייצר אנטרופיה. נתחיל את הדיון מהמקרה האידאלי שהוא תהליך הפיך ואין שינוי באנטרופיה הכוללת. מה שיוצא מלמעלה נכנס למטה. נזכר ש-$d\sigma = \frac{dQ}{\tau}$ ונקבל:

$$\frac{dQ_H}{\tau_H} = \frac{dQ_L}{\tau_L} \Rightarrow dQ_L = \frac{\tau_L}{\tau_H}dQ_H \tag{18}$$

שימור אנרגיה: $dW = dQ_H - dQ_L$ (החוק הראשון של התרמודינמיקה קובע שחום = אנרגיה) נציב את (17) בתוך השיוויון של שימור אנרגיה ונקבל:

$$dW = dQ_H - \frac{\tau_L}{\tau_H}dQ_H = \left(1 - \frac{\tau_L}{\tau_H}\right)dQ_H \tag{19}$$

מגדירים נצילות קרנו: $\eta_c = \frac{\text{כמות העבודה}}{\text{כמות חום נכנס}}$ ונקבל:

$$\eta_c = \frac{dW}{dQ_H} = 1 - \frac{\tau_L}{\tau_H} \tag{20}$$

זו הנצילות של תהליך הפיך.

מה קורה בתהליך לא הפיך?

תהליך לא הפיך קורה כאשר נוצרת אנטרופיה בתוך המנוע (למשל ע"י חיכוך אבל לא בהכרח), נסמן אותו ב-$d\sigma_{int}$. האנטרופיה הזאת עוברת לאמבט הקר. מה שחשוב שיש רק אופציה אחת והיא שהאנטרופיה הכוללת תגדל. איך בדיוק זה קורה לא חשוב. ולכן:

$$d\sigma_L \geq d\sigma_H \Rightarrow \frac{dQ_L}{\tau_L} \geq \frac{dQ_H}{\tau_H} \Rightarrow -dQ_L \leq -dQ_H\frac{\tau_L}{\tau_H} \tag{21}$$

ניעזר שוב בשימור אנרגיה כמו קודם ונקבל:

$$dW = dQ_H - dQ_L \leq dQ_H - dQ_H\frac{\tau_L}{\tau_H} = dQ_H\left(1 - \frac{\tau_L}{\tau_H}\right) \tag{22}$$

$$\eta \leq 1 - \frac{\tau_L}{\tau_H} \tag{23}$$

<u>מסקנה</u>- נצילות מקסימלית מתקבלת כאשר האנטרופיה נשמרת והתהליך הפיך.

בגלל חוזק חומרים מנועים עובדים בטמפרטורות בערך ב-$600K$ קלווין והאמבט הקר הוא האטמוספירה ב-$300K$. לכן נצילותם המקסימאלית טיפוסית היא 50%.

קרנו חי בתקופה של מנועי קיטור. הנצילות של מנוע מודרני היא $30\% - 40\%$ והנצילות של מנועי קיטור הייתה הרבה יותר נמוכה ובכל זאת הוא שם לב לחסם עליון על הנצילות. זו הייתה ההתחלה של התרמודינמיקה. קרנו כתב את החוק שלו כתוצאה מניסיונות, זהו חוק ניסיוני. רק אחר כך ג'אול ניסח את שימור האנרגיה ואז קלאוזיוס הבין שאם הוא <u>יגדיר אנטרופיה ע"י חום חלקי טמפרטורה וידרוש שימור אנטרופיה (בתהליך הפיך) ולא שימור חום, הוא ישחזר את חוק הנצילות של קרנו</u>.

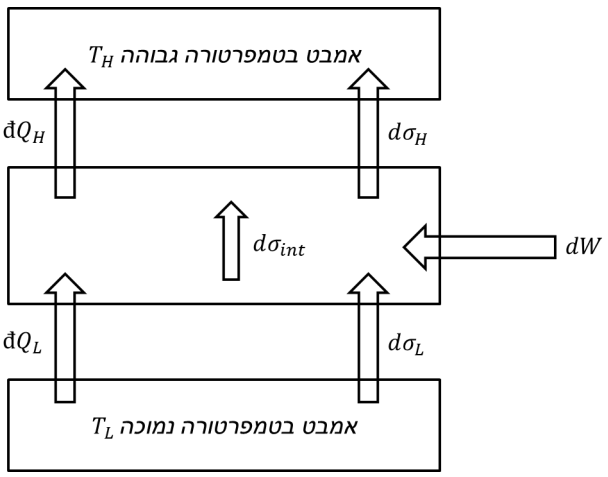
אבל קלאוזיוס לא הבין איך אנטרופיה קשורה לפיזיקה ניוטונית (ובטח לא קוונטית) להזכירכם בולצמן הוא זה שקישר את האנטרופיה למצבים.

מ-(18) רואים שכאשר $\tau_H = \tau_L$ לא נוכל להפיק עבודה. זה הניסוח השלישי לחוק השני של התרמודינמיקה. דהיינו: אי אפשר להפיק עבודה מטמפרטורה אחת.

הסיבות הנוספות לירידת נצילות הן:

1. מנוע אמיתי בנוי מגוש מתכת ולכן חום יכול לעבור בין אמבטי החום בלי להשפיע על הגז וזה גורם לירידה בנצילות, זרימה ישירה של חום בין הצדדים גורמת לירידה בנצילות.
2. יש גרדיאנט של טמפרטורה על פני המנוע.
3. כמו שאמרנו, תתכן התפשטות לא הפיכה של הגז, למשל אם גז קר/חם נישאב החוצה מחלל לפני שגז קר/חם ניכנס. או אם הבוכנה עובדת כל כך מהר שהגז לא מספיק להתארגן על עצמו, להיות כל הזמן בשיווי משקל, ולקיים את משוואות המצב.

<u>מזגן/מקרר:</u>
<u>מזגן/מקרר</u> זה מנוע שבנוי הפוך:



מזגן או מקרר לוקח חום מהצד הקר ושופך אותו בצד החם. משתמשים בעבודה כדי לבצע את התהליך.
עבור מקרר שמבצע תהליך הפיך (שהאנטרופיה נשמרת בתהליך): שוב דרוש שהאנטרופיה הנכנסת והיוצאת יהיו זהות. ולכן כמו קודם:

$$dQ_H = \frac{\tau_H}{\tau_L} dQ_L \tag{24}$$

$$dW + dQ_L = dQ_H \Rightarrow \frac{\tau_H - \tau_L}{\tau_L} dQ_L = dW \tag{25}$$

נצילות של מקרר:

$$\gamma_c = \frac{dQ_L}{dW} = \frac{\tau_L}{\tau_H - \tau_L} \tag{26}$$

בתהליך לא הפיך:

$$d\sigma_H \geq d\sigma_L \tag{27}$$

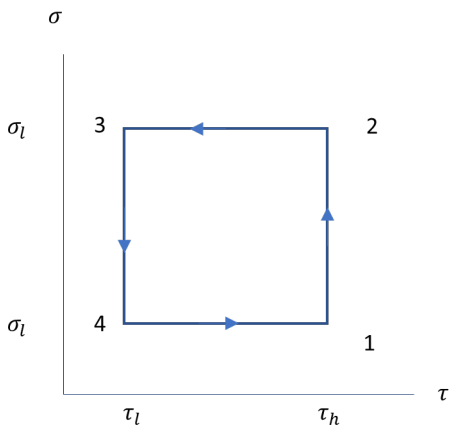
$$\Rightarrow dW = dQ_H - dQ_L \geq \left(\frac{\tau_H}{\tau_L} - 1\right) dQ_L \tag{28}$$

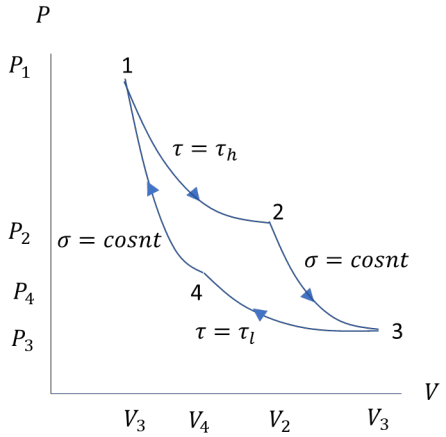
$$\Rightarrow \gamma \leq \frac{\tau_L}{\tau_H - \tau_L} \tag{29}$$

נשים לב שבמזגן אנחנו יכולים לבחור בין קירור לבין חימום שלפי מה שראינו עכשיו הן פעולות הפוכות. מזגן שעובד בחימום זה כמו מקרר ששמנו אותו הפוך עם התא הקר מחוץ לבית והמנוע בתוך הבית ואז הוא מקרר את "הבחוץ" ומחמם את "הבפנים". כשמזגן עובד במוד חימום אנחנו מכניסים עבודה ומעבירים חום מצד הקר לצד החם ואלו אותם עקרונות של נצילות. ההבדל הוא למי אנחנו קוראים חדר ולמי חוץ:

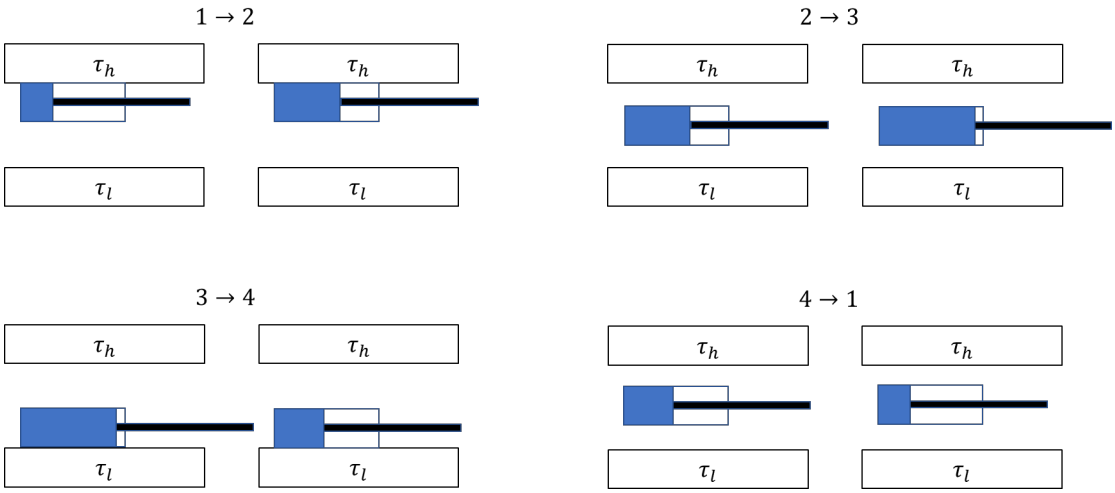
- כאשר אנחנו עובדים על חימום אזי τ_H הוא החדר.
- כאשר עובדים על קירור אז τ_L הוא החדר.

<u>מעגל קרנו</u>
הדיון עד כה לא כלל את אופן בניית המנוע. המנוע היעיל ביותר הוא מעגל קרנו. המעגל בנוי מ-4 צעדים שניתן לייצג אותם בשתי דיאגרמות:





פרקטית המעגל ניראה כך:



השלבים הם: $1 \to 2$ התפשטות בטמפרטורה גבוהה קבועה. חום זורם למערכת והאנטרופיה גדלה. הנפח גדל הלחץ יורד. $2 \to 3$ התפשטות באנטרופיה קבועה (ללא החלפת חום) הנפח גדל, הלחץ יורד והטמפרטורה יורדת. נותנים לטמפרטורה לרדת עד τ_l. $3 \to 4$ התכווצות בטמפרטורה נמוכה קבועה. הנפח קטן, הלחץ עולה והאנטרופיה קטנה. $4 \to 1$ התכווצות באנטרופיה קבועה. הנפח קטן, הלחץ עולה והטמפרטורה עולה. נותנים לטמפרטורה לעלות עד τ_h.

כל השלבים נעשים לאט מספיק שמשואות המצב מתקיימות.

נחשב את העבודה שהרווחנו במעגל ואת הנצילות שלו:
$2 \to 1$ בגלל שהטמפרטורה קכוע האנרגיה קבוע וזרימת החום שווה לעבודה

$$\Delta Q_h = \Delta W_{12} = \int PdV = N\tau_h \int \frac{dV}{V} = N\tau_h \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$2 \to 3$

$$\Delta W_{23} = U(\tau_h) - U(\tau_l) = \frac{3}{2}N(\tau_h - \tau_l)$$

הקטע הזה נעשה באנטרופיה קבועה לכן לפי (2):

$$\frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{\tau_h}{\tau_l}\right)^{3/2}$$

$3 \to 4$

$$\Delta W_{34} = N\tau_l \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

זאת למעשה עבודה שלילית.
$4 \to 1$

$$\Delta W_{41} = \frac{3}{2}N(\tau_l - \tau_h)$$

גם הקטע הזה נעשה באנטרופיה קבועה לכן:

$$\frac{V_4}{V_1} = \left(\frac{\tau_h}{\tau_l}\right)^{3/2}$$

זאת אומרת ש:

$$\frac{V_4}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}$$

סה"כ:

$$\Delta W = N\tau_h \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - N\tau_l \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) = N\left(\tau_h - \tau_l\right)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

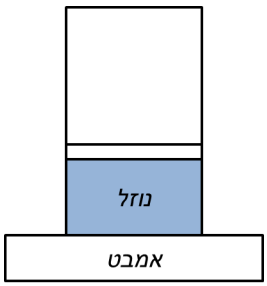
$$\eta_c = \frac{\Delta W}{\Delta Q_h} = \frac{\tau_h - \tau_l}{\tau_h} = 1 - \frac{\tau_l}{\tau_h}$$

למעגל קרנו נצילות מקסימאלית.

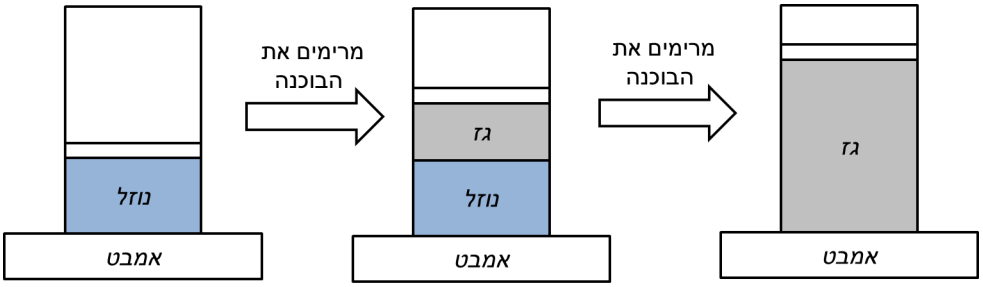
ראינו שלפעמים האנטרופיה של מערכת יכולה להעלות ביותר מאשר החום היוצא מהאמבט כמו בשבשבת או ה"התפשטות לתוך ריק". זה קורה כשהמערכת לא בשיווי משקל ומשנה פרמטר כדי להגיע למקסימום אנטרופיה, או כתוצאה מחיכוך כמו בשבשבת. במקרה זה לחום היוצא מהאמבט ניקרא dQ_{irrev} ו-$dQ_{irrev} < \tau ds$.

הרצאה 23 - מעברי פאזה: קיום משותף

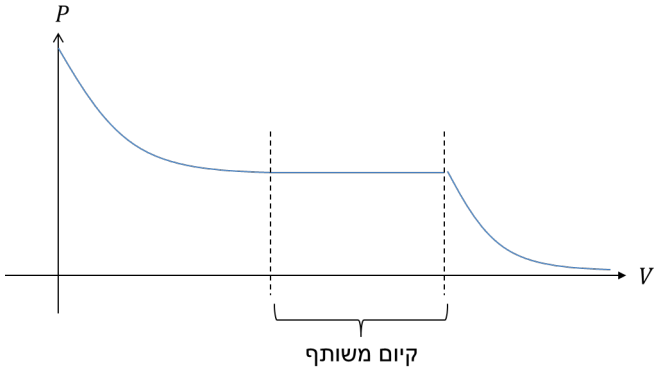
<u>קיום משותף:</u>
לוקחים בוכנה מצומדת לאמבט חום. בתחתית הבוכנה יש נוזל:



כאשר אנחנו מרימים את הבוכנה זה מושך את האטומים כלפי מעלה ומתבצע התהליך הבא:



להלן דיאגרמה של הלחץ כפונקציה של הנפח בתהליך זה:



קיום משותף זה כאשר הלחץ לא תלוי בנפח. במקרה הזה ככל שמרימים את הבוכנה, הנוזל משחרר עוד אדי גז וממלא את הנפח הנוסף ושומר על לחץ קבוע.

אנחנו שואלים מה שינוי הלחץ כפונקציה של שינוי הטמפרטורה במצב של קיום משותף, כלומר מהו $\frac{dP}{dT}=?$.
יש לנו 2 סוגים של חומרים בתוך הקופסא: גז ונוזל. גז יכול להפוך לנוזל ולהיפך. המערכת נמצאת ש"מ בלחץ וטמפרטורה קבועים (רק יחס הנפחים בין הנוזל לגז משתנה) ולכן נשתמש באנרגיה החופשית של גיבס: בשיעור 11, מ-$G=u-\tau\sigma+PV$ ואוילר $u=\tau\sigma-PV+\mu N$ קיבלנו $G=\mu N$.

$$G=u-\tau\sigma+PV=\mu N \tag{1}$$

נסמן גז$=g$, נוזל$=l$. G אדיטיבית וסה"כ האטומים נשמר. לכן נקבל בש"מ:

$$\mu_l\left(P,\tau\right)=\mu_g\left(P,\tau\right) \tag{2}$$

וזה מתקיים בכל נקודה, לכן מתקיים גם:

$$\mu_l\left(P_0+dP,\tau_0+d\tau\right)=\mu_g\left(P_0+dP,\tau_0+d\tau\right) \tag{3}$$

נפתח את הביטוי הנ"ל לטור ונקבל:

$$\cancel{\mu_l(P_0,\tau_0)} + \left(\frac{\partial\mu_l}{\partial P}\right)_\tau dP + \left(\frac{\partial\mu_l}{\partial\tau}\right)_P d\tau = \cancel{\mu_g(P_0,\tau_0)} + \left(\frac{\partial\mu_g}{\partial P}\right)_\tau dP + \left(\frac{\partial\mu_g}{\partial\tau}\right)_P d\tau \tag{4}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\tau} = \frac{\left(\frac{\partial\mu_l}{\partial\tau}\right)_P - \left(\frac{\partial\mu_g}{\partial\tau}\right)_P}{\left(\frac{\partial\mu_g}{\partial P}\right)_\tau - \left(\frac{\partial\mu_l}{\partial P}\right)_\tau} \tag{5}$$

נרצה למצוא את הגדלים שמיוצגים ע"י הנגזרות החלקיות. לטובת כך נשתמש בקשרים הנגזרים מהאנרגיה החופשית של גיבס:

$$dG = du - \tau d\sigma - \sigma d\tau + \ldots = \mu dN - \sigma d\tau + V dP \tag{6}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{N,\tau} = V, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial\tau}\right)_{N,P} = -\sigma \tag{7}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{G=\mu N} N\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_{N,\tau} = V, \quad N\left(\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\right)_{N,P} = -\sigma \tag{8}$$

נציב את זה בביטוי שקיבלנו עבור $\frac{dP}{d\tau}$ ונקבל:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{\frac{\sigma_g(\tau,P,N_g)}{N_g} - \frac{\sigma_l(\tau,P,N_l)}{N_l}}{\frac{V_g}{N_g} - \frac{V_l}{N_l}} \tag{9}$$

משוואה זו נקראת משוואת קלאוזיוס-קלפרון. היא מספקת דרך למדוד את האנטרופיה של הנוזל.

נשים לב שכל הגדלים בצד ימין הם אינטנסיביים ואינם תלויים בכמות הגז או הנוזל.

נגדיר L ככמות החום הדרושה להפוך אטום אחד מגז לנוזל. גודל זה ניקרא חום כמוס (latent heat):

$$L = \tau\left(\frac{\sigma_g(\tau,P,N_g)}{N_g} - \frac{\sigma_l(\tau,P,N_l)}{N_l}\right) \tag{10}$$

גודל זה נמדד בטמפרטורה ולחץ קבועים.

נגדיר גם $\Delta v = \frac{V_g}{N_g} - \frac{V_l}{N_l}$ כשינוי הנפח כשמולקולה אחת עוברת מנוזל לגז.

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{L}{\tau\Delta v}$$

ברור ש-$\frac{V_g}{N_g} \gg \frac{V_l}{N_l}$ ולכן עבור גז אידיאלי:

$$\Delta v = \frac{V_g}{N_g} = \frac{\tau}{P}$$

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{L}{\tau^2}P$$

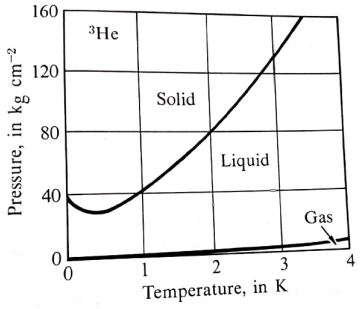
$$\frac{dP}{P} = \frac{L}{\tau^2}d\tau$$

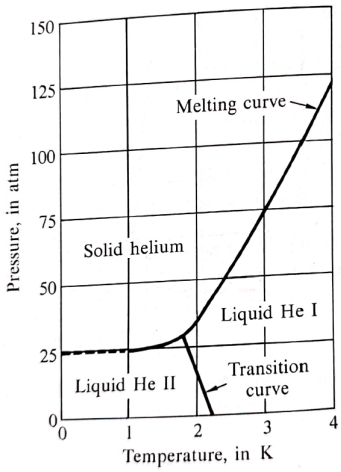
אם במקרה L לא תלוי בטמפרטורה אז:

$$P = P_0 \exp\left(-L/\tau\right)$$

מקובל לצייר את $\log P$ כפונקציה של $1/\tau$ ולקבל קו ישר. או בתחום קטן של טמפרטורות אפשר לצייר את P כפונקציה של τ. בעבר השתמשו בגרף כזה עבור הליום למדוד טמפרטורה ע"י לחץ האדים של הגז.

עובדות מעניינות: עבור הליום 4 הקו לחץ טמפרטורה המתאר את מעבר הפאזה בין נוזל למוצק הוא שטוח (לא תלוי בטמפרטורה) כמודגם בציור מימין (7.14 בקיטל). מה שאומר שאין הבדל אנטרופיה בין המוצק לנוזל $(L = 0)$. עוד אינדיקציה שהליום הוא לא נוזל או מוצק רגיל.
יותר מעניין שעבור הליום 3 $P(\tau)$ זאת פונקציה יורדת. מכאן ש-L שלילי. לנוזל יש פחות אנטרופיה מהמוצק. איך יתכן? ההסבר הוא שהנוזל הוא גז פרמי ובמקרה זה רק חלק קטן מהאטומים (ליד אנרגית פרמי) תורמים לאנטרופיה. לכל השאר יש רק מצב אחד להיות בו. המוצק מתואר ע"י אוסילטורים.





<u>נשאלת השאלה מדוע מעברי פאזה קורים?</u>
מכיוון שבמעבר מגז לנוזל אטומים נצמדים אחד לשני ברור שדרוש מודל עם אינטראקציות מושכת, אבל לא מושכת מדי כי אטומים לא עולים אחד על השני. נבנה מודל פשוט המכיל שני תיקונים.

1. נחליף את הנפח בו השתמשנו עד כה, בנפח הכלי פחות נפח אפקטיבי של כל האטום b: $V \to V - bN$.
2. נוסיף פוטנציאל $\varphi(r)$ בין אטומים כך שהוא מתבדר כשהאטומים קרובים, מקבל מינימום שלילי במרחק סביר בין האטומים, ועולה לאפס גם במרחק סביר. מה זה סביר תיכף ניראה. אינטראקציה כזאת נקראת קיצרת טווח.

נניח מטען בוחן בראשית. אנרגית האינטראקציה עם האטומים במרחק r מהראשית היא $\varphi(r)\, ndV$. נגדיר a דרך:

$$\int_b^\infty \varphi(r)\, ndV = -2na$$

התרומה לאינטגרל היא מרדיוס "סביר" סביב כל אטום. המינוס כי האנרגיה חייבת להיות סה"כ שלילית כי אטומים קשורים. ה-2 לנוחות.

עכשיו כל אטום של הגז יכול להיות בראשית לכן סה"כ השינוי באנרגיה מהאנרגיה הקינטית הוא:

$$\Delta U = -\frac{1}{2}\left(2an\right)N = -a\frac{N^2}{V}$$

החצי הוא כדי לא לספור אטומים פעמים. התנאי כאן הוא שהאינטראקציה קיצרת טווח מספיק כך שאם הראשית קרובה לשפה הטעות קטנה ביחס לאנרגיה הכוללת. מרחק "סביר" זה ביחס לנפח.

הפטנט הזה ניקרא תורת השדה הממוצע (mean field theory). אין שום חלקיק שמרגיש שדה אחר מחבריו.

בטמפרטורה נתונה תוספת אנרגיה אחידה מצטרפת לאנרגיה החופשית כהזזה גלובלית (כמו בבטריה או בורטקסים). לכן האנרגיה החופשית היא:

$$F_{interactions} = F_{no-interactions}\left(V - bN\right) - a\frac{N^2}{V}$$

$$F_{no-interactions}\left(V\right) = -\tau N\left[\ln V + \ln\left(\tau^{\frac{3}{2}}\right) + const\right]$$

כאשר הקבוע לא תלוי ב-V (נוסחה 32 שיעור 9). נקבל את הלחץ מ-$P = -\left(\partial F_{interactions}/\partial V\right)_{\tau}$ כך ש:

$$P = \frac{\tau N}{V - bN} - a\frac{N^2}{V^2}$$

ניתן לכתוב זאת כך:

$$\left(P + a\frac{N^2}{V^2}\right)\left(V - bN\right) = \tau N \tag{11}$$

זאת משוואת ון דר וולס (Waals der Van) אשר ראיתם בתרגיל בתחילת הקורס, רק שהפעם גזרנו אותה מעקרונות יסוד.

אנו אוהבים לעבוד עם גדלים חסרי יחידות ולהוציא מהמשחק קבועים. לכן מי שחקר את הפונקציה ראשון הגדיר.

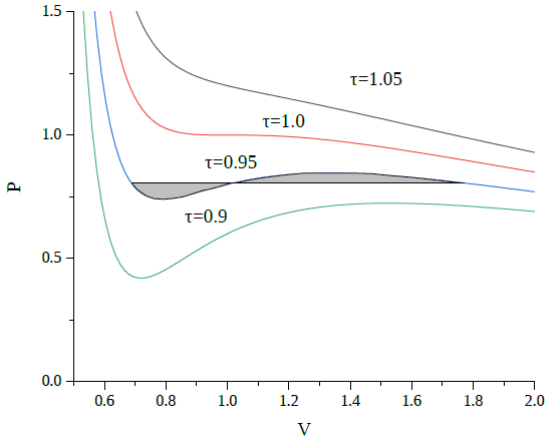
$$\frac{27b^2P}{a} \to P, \quad \frac{V}{3Nb} \to V, \quad \frac{27b\tau}{8a} \to \tau$$

$$\left(P + \frac{3}{V^2}\right)\left(V - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\tau$$

או

$$P = \frac{8\tau}{(3V - 1)} - \frac{3}{V^2}$$

ועכשיו כל הגדלים חסרי יחידות. ניתן לצייר את הקשר בין P ל-V לכל τ.



נשים לב כי ב-$\tau = 1$ יש תחום שבו הנפח משתנה אבל הלחץ לא. זה מתאים למצב של קיום משותף גז נוזל. ב-$\tau = 1$ יש נקודת פיתול. נדרוש:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{\tau} = 0, \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_{\tau} = 0$$

ויחד אם המשוואה המקורית נקבל $P = 1,\ V = 1,\ \tau = 1$. משמע כשמקררים, הקיום המשותף מתחיל מ-$\tau = 1$ ומטה, וכשהוא מתחיל $P = 1,\ V = 1$. לכן ביחידות החדשות $P_c = 1,\ V_c = 1,\ \tau_c = 1$.

<u>מה קורה עם מקררים עוד, איך נדע מה P?</u>
אנחנו כבר יודעים מ-(2) שדרוש:

$$\mu_l(P,\tau,N)=\mu_g(P,\tau,N) \tag{12}$$

אבל יש לנו מודל אחד לגז ולנוזל. איך מחשבים את μ ואיך מפרידים בין גז לנוזל? לפי (1):

$$G=G(\tau,P,N)=F_{interactions}(\tau,V,N)+PV$$

ו-

$$\mu(\tau,P,N)=\frac{G(\tau,P,N)}{N}=\{F_{interactions}(\tau,V,N)+PV\}/N \tag{13}$$

כאשר חייבים להביע את $V=V(P)$ כי התנאי (2) הוא בלחץ קבוע.

אבל הקשר (11) הוא משואה ממעלה שלישית. יש לקשר עד 3 פתרונות מסורבלים ביותר
https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell_construction#Solving_the_cubic_to_obtain_vapor_pressures
לא נכתוב אותם פה.

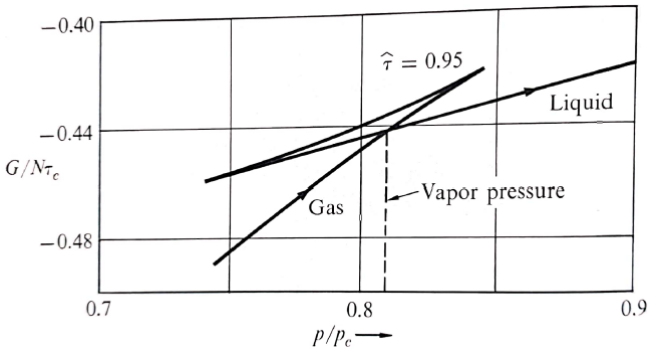
בכל זאת, נגיד שמצאנו את $V=V_{i=1..3}(P)$ נציב ב-(13) ונקבל $G_i(\tau,P,N)$. בכל τ,P,N ה-G הקטן מבין השלושה הוא ה-G היציב כי ל-G צריך להיות במינימום.

עכשיו נלך לגבול של לחצים נמוכים. ה-G_i הקטן מבין השלושה בגבול זה מיצג את ה-G של הגז, כי בלחץ שואף לאפס אנו מצפים לקבל גז.

נלך לגבול של לחצים גבוהים. ה-G_i הקטן מבין השלושה בגבול זה מיצג את ה-G של הנוזל כי בלחץ עצום אנו מצפים לקבל נוזל.

ה-G השלישי לא יציב.

אז עכשיו אנו יודעים איזה $V=V_i(P)$ להציב ב-(13) כדי לקבל את $\mu_l(P,\tau,N)$ ואיזה $V=V_i(P)$ להציב כדי לקבל את $\mu_g(P,\tau,N)$. עכשיו נדרוש את (12) ע"י השוואת שני $G_i(\tau,P,N)$. לצערנו את כל התהליים הזה אפשר לעשות רק נומרית. כך נראים הפתרונות הנומריים:



כאשר $p_c=a/27b^2,\quad \tau_c=\frac{8a}{27b}$.
ננסה משהו יותר ציורי.
לפי (6):

$$dG=\mu dN-\sigma d\tau+VdP=VdP$$

או:

$$\Delta G=\int VdP$$

אבל כאמור:

$$\Delta G=0=\mu_l(\tau,P_0)-\mu_g(\tau,P_0)$$

$$\int_{V_1}^{V_2}VdP=0$$

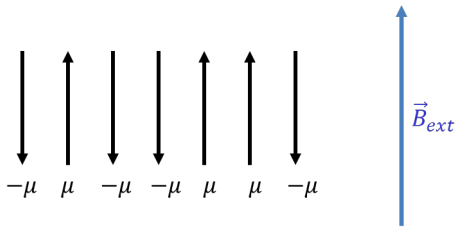
V_1 זה נפח הנוזל בלי גז ו-V_2 זה נפח הגז בלי נוזל. מספר החלקיקים מצטמצם כשכל הנוזל הופך לגז.

נסתכל שוב על הגרף. אומנם האינטגרל הזה הפוך אבל הוא עדיין אומר שיש P_0 כך שסה"כ השטחים האפורים מתחת ומעל לגרף צריכים להיות אפס. כך יודעים מה הלחץ P_0 במצב של קיום משותף לפחות באופן ציורי, וגם ומה הם הנפחים של הנוזל והגז במצב זה. נשים לב שוב שב $\tau < 1$ יש 3 פתרונות $V = V_i(P)$ וב-$\tau > 1$ רק פתרון אחד. P_0 זה הלחץ שיהיה במערכת בקיום משותף.

הרצאה 24 - מעברי פאזה מגנטיים ותורת לנדאו

כאמור מעברי פאזה זה נושא שלומדים אותו בסטטיסטית 2 אבל היום נקבל עוד טעימה.

נתחיל פשוט: נדון בשרשרת של מומנטים כאשר כל מומנט הוא בעל ערך $\pm\mu$, והם נמצאים בשדה מגנטי $\overrightarrow{B}$ וטמפרטורה τ:



נתחיל ממומנט בודד. ידוע כי עבור כל שדה $\overrightarrow{B}$ במערכת:

$$\epsilon = -\overrightarrow{\mu} \cdot \overrightarrow{B} \tag{1}$$

$$P_+ = \frac{e^{\frac{\mu B}{\tau}}}{Z}, \quad P_- = \frac{e^{-\frac{\mu B}{\tau}}}{Z} \tag{2}$$

$$Z = e^{\frac{\mu B}{\tau}} + e^{-\frac{\mu B}{\tau}} \tag{3}$$

כאשר $P_\pm$ זה הסיכוי להיות מעלה/מטה.

נשתמש בהגדרה של תוחלת ונקבל:

$$\langle \mu \rangle = \frac{\mu e^{\frac{\mu B}{\tau}} - \mu e^{-\frac{\mu B}{\tau}}}{e^{\frac{\mu B}{\tau}} + e^{-\frac{\mu B}{\tau}}} = \mu \cdot \tanh\left(\frac{\mu B}{\tau}\right) \tag{4}$$

נגדיר מגנוט של כל השרשרת ע"י:

$$M = N \cdot \langle \mu \rangle = N \cdot \mu \cdot \tanh\left(\frac{\mu B}{\tau}\right) \tag{5}$$

כעת ניקח את האינטראקציות בין המומנטים בחשבון. נכבה את השדה המגנטי החיצוני, $\overrightarrow{B}_{ext}$, ונסתכל על מומנט אחד והשדות שנובעים משאר המומנטים האחרים, לזה אנחנו קוראים אינטראקציה.

נניח כי השדה שמרגיש אחד המומנטים B_{in} (internal) פרופורציוני למגנוט של השרשרת כך ש:

$$B_{in} = \lambda M + \overbrace{\overrightarrow{B}_{ext}}^{=0} = \lambda M \tag{6}$$

כאשר λ הוא קבוע פרופורציה שנניח את קיומו, אבל לא נחשב אותו (בקורס הזה). שוב הפעלנו תורת שדה ממוצע כי אין הבדל בין מומנט למומנט, כול המומנטים חשים אותו שדה. החשבון (5) נכון עבור כל שדה מגנטי במערכת ולכן עבור השדה B_{in} שהגדרנו נקבל:

$$M = N\mu \tanh\left(\frac{\mu\lambda M}{\tau}\right) \tag{7}$$

נסמן גדלים חסרי יחידות: $m = \frac{M}{N\mu}$ ו:

$$t = \frac{\tau}{N\mu^2\lambda}$$

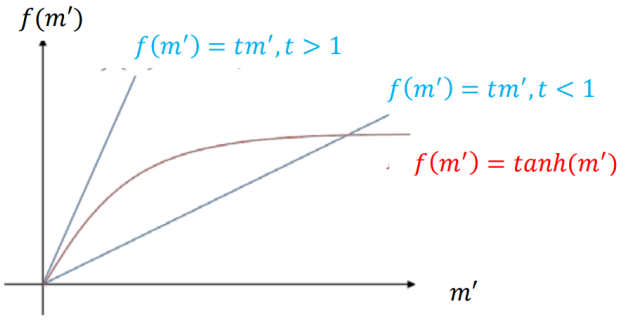
ונקבל:

$$m = \tanh(m/t) \tag{8}$$

זאת משוואה שצריך לפתור. לצורך ויזואלי נוח לעשות עוד החלפת משתנים ולכתוב $m' = m/t$ כך ש:

$$m' \cdot t = \tanh(m')$$

ולפתור עבור m'. לצורך כך נראה איך כל אחת מהפונקציה נראית:



עבור t גדול אנחנו רואים שיש רק פתרון אחד למשוואה והוא $m' = 0$. כאשר t יורד מתחת למספר מסוים $m' \neq 0$ פותר את המשוואה. המעבר בין t גדול לקטן (וההיפך) מתבצע ע"י שינוי של הטמפרטורה. קיבלנו שבטמפרטורות מספיק נמוכות יש מגנוט ספונטני, כלומר מתבצע מעבר ממצב לא ממוגנט למצב ממוגנט רק ע"י קירור (בלי שדה חיצוני). זה נקרא מעבר פאזה. אבל שימו לב שמשוואה לא אומרת אם m חיובי או שלילי.

במפעל לייצור מגנטים לוקחים ברזל למשל, מפעילי עליו שדה מגנטי חזק, מחממים את המערכת ואז מקררים אותה עם שדה מגנטי חיצוני, מכבים את $\vec{B}$ ומאותו רגע המגנט מחזיק את עצמו ע"י השדות הפנימיים ממוגנט.

<u>מהי הטמפרטורה הקריטית?</u>
הנקודה הקריטית היא כאשר $t = 1$ מכיוון שהשיפוע של $\tanh(x)$ הוא 1 ב-$x = 0$ וזה גם השיפוע של $t \cdot m'$ כאשר $t = 1$.
סה"כ קיבלנו:

$$\boxed{k_B T_c = N\mu^2\lambda} \tag{9}$$

לסיכום, קיבלנו במודל זה שכאשר יש אינטראקציות יש מעבר פאזה, מחומר מגנטי לא ממוגנט לחומר ממוגנט. ע"י מדידה של הטמפרטורה הקריטית בעצם מדדנו את λ.

<u>אקספוננטים קריטיים:</u>
אפשר לשאול באיזה קצב המומנט עולה כשהטמפרטורה יורדת מתחת לטמפרטורה הקריטית. נחזור ל-(8) נכתוב:

$$t = T/T_c$$

ונעבוד ליד הטמפרטורה הקריטית היכן ש-$m \ll 1$. נפתח את $\tanh$ לטור:

$$m = \tanh\left(\frac{m}{t}\right) \simeq \frac{m}{t} - \frac{1}{3}\left(\frac{m}{t}\right)^3$$

$$3t^3 = 3t^2 - m^2$$

נתעניין רק בטמפרטורות ליד הטמפרטורה הקריטית $t \to 1^-$ ולכן נגדיר:

$$\epsilon = 1 - t$$

$$3(1-\epsilon)^3 = 3(1-\epsilon)^2 - m^2$$

נפתח ל:

$$3\left(1-3\epsilon\right)=3\left(1-2\epsilon\right)-m^{2}$$

$$3\epsilon=m^{2}$$

ליד $t=1$:

$$m\propto\left(1-t\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{T}{Tc}\right)^{\frac{1}{2}}$$

האקספוננט הקריטי הוא $1/2$.

אפשר לעשות חשבון דומה ליד $t=0$ ולשאול באיזה קצב המגנוט יורד מערכו המקסימאלי. לפי (8) כשהטמפרטורה יורדת לאפס $t\to0$, המגנוט עולה לערך מקסימאלי, $m\to1$.

אבל את זה נשאיר לסמסטר הבא כדי להראות שהמודל לא מספיק טוב ואיך משפרים.

בגדול תורת השדה הממוצע חוזה קיום מעבר פאזה אבל לא מטפלת בו טוב מעבר לזה (כמו בקיום משותף).

<u>תורת לנדאו</u>

לנדאו חיפש דרך להכניס לחשבון שינויים במומנט בין אזור לאזור. הרי במגנטים יש לפעמים "אזורים" עם כיווני מגנוט שונים (domains). אפשר ממש לראות זאת בתמונות

. `https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_domain`

התורה שלנדאו יצר למעברי פאזה הפכה להיות מקובלת ברמה של משואות ניוטון או מקסוול או יחסות או בולצמן או שרדינגר... והיא משמשת לדיון באינטראקציות בתחומים מחומרים, דרך חלקיקים, ועד אסטרופיזיקה. אנחנו נטעם מהתורה. נבנה אותה סביב מגנטיות של חומר מוצק.

במוצק, הנפח ומספר החלקיקים קבוע, ועובדים בצמוד לאמבט חום. לכן אנו צריכים לדון באנרגיה חופשית F. את תאוריית לנדאו כמובן שאפשר להפעיל בתנאים אחרים ולדון בפוטנציאל אחר, אבל קודם נבין את העקרון. נניח ש-F היא פונקציה של τ ושיש לה פרמטר פנימי m אותו המערכת בוחרת כך ש-F תהייה מינימום. בכל טמפרטורה זה מינימום אחר. ולכן נרשום:

$$F=F\left(\tau,m\right)$$

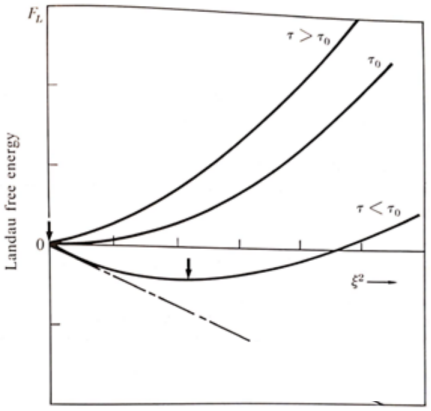
ראינו שבמגנטיות (ללא שדה חיצוני) אין הבדל בין m ל-$-m$. לכן F צריכה להיות פונקציה זוגית של m. נתעניין במיוחד ב-m קטנים (ליד מעבר הפאזה) ונפתח את F לטור ב-m. המקדמים של הטור יכולים להיות תלוי טמפרטורה. לכן נכתוב:

$$F\left(\tau,m\right)=g_{0}\left(\tau\right)+\frac{1}{2}g_{2}\left(\tau\right)m^{2}+\frac{1}{4}g_{4}\left(\tau\right)m^{4}+\frac{1}{6}g_{6}\left(\tau\right)m^{6}+\ldots$$

עכשיו נוסיף הנחה ידנית שאנו רוצים לתאר מערכת שיש בה מעבר פאזה ב-τ_c. נבנה את ה-g-ים שיעשו מה שאנו רוצים. אחר כך נישאל אם אפשר להרפות הנחות מסוימות. בהתחלה ניקח את:

$$g_{2}\left(\tau\right)=\alpha\left(\tau-\tau_{c}\right)$$

כש-$\alpha>0$ ואת שאר ה-g-ים בלתי תלויים בטמפרטורה וחיוביים.
בשלב ראשון נעצור בחזקה הרביעית. עבור $\tau>\tau_c$, F מונוטונית עולה. עבור $\tau<\tau_c$ הפונקציה קודם יורדת ורק אחר כך עולה. נמצא את המינימום של F.



$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial m}\right)_\tau = \alpha\left(\tau - \tau_c\right) m + g_4 m^3$$

$$m = 0, \quad m = \sqrt{\frac{\alpha\left(\tau_c - \tau\right)}{g_4}}$$

מה שחשוב זה המינימום הגלובאלי. עבור $\tau_c < \tau$ $m = 0$ נותן את המינימום של F ועבור $\tau_c > \tau$ מגנוט הסופי עדיף. ניתן לראות מהגרף שהמעבר בין $F\left(\tau\right)$ המינימאלית היא פונקציה רציפה של הטמפרטורה. למעשה אם נציב את הפתרונות חזרה ל-$F\left(\tau\right)$ נקבל:

$$F\left(\tau\right) = g_0 + \frac{1}{2} g_2 \frac{\alpha\left(\tau_c - \tau\right)}{g_4} + \frac{1}{4} g_4 \left(\frac{\alpha\left(\tau_c - \tau\right)}{g_4}\right)^2$$

ניזכר ש:

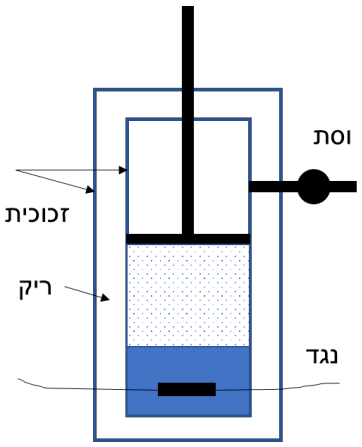
$$\sigma = -\left(\frac{\partial F\left(\tau\right)}{\partial \tau}\right)_{V,N} = -\frac{1}{2} g_2 \frac{\alpha \tau_c}{g_4} - \frac{1}{2} g_4 \frac{\alpha^2\left(\tau_c - \tau\right)}{g_4^2}$$

גם האנטרופיה רציפה סביב τ_c ואין הבדלי אנטרופיה בין המצב עם מגנטיזציה סופית (אחרי מעבר הפאזה) למצב ללא מגנטיזציה (לפני מעבר הפאזה). לכן אין חום כמוס במעבר הפאזה.

תזכורת חום כמוס מוגדר כהפרש בין שתי פאזות שבשיעור שעבר היו גז ונוזל.

$$L = \tau\left(\frac{\sigma_g\left(\tau, P, N_g\right)}{N_g} - \frac{\sigma_l\left(\tau, P, N_l\right)}{N_l}\right)$$

אינטרמצו: איך מודדים



נאזן לחצים משני צידי הבוכנה. אחר כך נמשוך הבוכנה למעלה. בקיום משותף לחץ הגז לא ישתנה, אבל נוזל יהפוך לגז וכמות הנוזל תקטן. ללא נגד, המעבר מנוזל לגז היה מקרר את הנוזל. תפקיד הנגד לשמור טמפרטורה קבועה. נמדוד כמה אנרגיה בצורת חום יש לספק כדי לשמור על טמפרטורה קבועה ונראה (דרך הזכוכית) בכמה ירד הנוזל. L זאת האנרגיה שסופקה פר אטום נוזל שהפך לגז.

למגנטיות נגדיר:

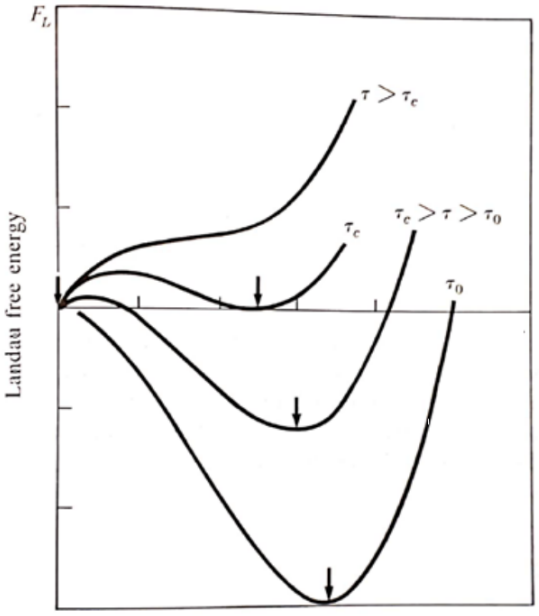
$$L = \tau \left(\frac{\sigma_{m=0}\left(\tau, V, N\right)}{N} - \frac{\sigma_{m\to 0^+}\left(\tau, V, N\right)}{N} \right)$$

(פאזה מסודרת ולא מסודרת) במעבר שלנו $L = 0$.

<u>מעבר כזה ניקרא מעבר מסדר שני</u>. לא משקיעים חום בכיוון אחד ולא מקבלים חום בכיוון שני כשהפאזות מתחלפות.

מעבר הפאזה היה קורה גם אם g_4 תלוי טמפרטורה אבל חיובי, ו-g_0 גם יכול להיות תלוי טמפרטורה.

<u>מעבר פאזה מסדר ראשון</u>
אפשר להשתמש ברעיון של לנדאו לדמיין סיטואציות יותר מורכבות. נניח שיש עוד איבר באנרגיה החופשית, וש-g_4 שלילי, g_6 חיובי, ו-g_2 כמו קודם. עבור בחירה מסוימת האנרגיה החופשית תראה כך:



במקרה זה:

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial m} \right)_\tau = \alpha\left(\tau - \tau_0\right) m - |g_4| m^3 + g_6 m^5$$

שימו לב שכאן החלפתי את τ_c ב-τ_0 שכן הם לא שווים. τ_c זאת הטמפרטורה עבורה המינימום של F הוא ב-m סופי.
יש לנו שוב שני פתרונות $m = 0$, והפתרון של המשואה:

$$0 = \alpha\left(\tau - \tau_0\right) - |g_4| m^2 + g_6 m^4$$

$$m^2 = \frac{|g_4| \pm \sqrt{g_4^2 - 4 g_6 \alpha\left(\tau - \tau_0\right)}}{2 g_6}$$

רק ה $+$ מעניין. כדי למצוא את τ_c צריכים לקחת את m^2 ולהציב ב-$F\left(\tau, m\right)$ ולשאול עבור איזה τ, m סופי הופך להיות עם F יותר נמוך מ-$m = 0$. יותר קל לעשות זאת באופן ציורי. עבור סט של g-ים שמדגים את הרעיון. הגודל m קופץ באופן לא

רציף מ-$m=0$ לערך סופי. עבור $\tau > \tau_c$ נקודת המינימום של F לא משתנה עם הטמפרטורה ו-$\sigma = -\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)_{V,N} = 0$. עבור $\tau < \tau_c$ נקודת המינימום של F משתנה מהר עם הטמפרטורה ו:

$$\sigma = -\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)_{V,N} > 0$$

במקרה זה $\sigma = -\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)_{V,N}$ מאוד שונה בין הפתרונות בין $m=0$ ובין $m \to 0^+$, ולכן מעבר הפאזה מסדר שני כולל קפיצה במיגנוט ופליטת חום.

איך נרחיב את התורה שלא תעסוק רק בשדה ממוצע. נחליף את m שב-F ב-$m\left(\overrightarrow{r}\right)$ ונוסיף איברים כמו $\left(\nabla m\left(\overrightarrow{r}\right)\right)^2$ עם מקדם ונמצע על כל הנפח. הריבוע כי לא איכפת לנו אם המגנוט עולה או יורד כשצועים בכיוון מסוים.

בתורת לנדאו הכללית את השם מגנטיזציה מחליפים בשם פרמטר סדר (order parameter). התורה תקפה לחומרים דיאלקטריים, למוליכי על, ועוד ועוד. בכל מיקרה פרמטר הסדר מציין גודל פיזיקאלי אחר. במוליכות על למשל זה מספר האלקטרונים שמשתתפים במוליכות העל.

בקורסים הבאים שלכם תיתנו משמעות מיקרוסקופית למקדמים בתורת לנדאו.

סוף

הרצאות אורח הן חלק מהקורס.

אפשר לדבר על הבחינה!