# בית ספר הלן דילר לחישוב קוונטי – הרצאה #2
# הרבה קיוביטים

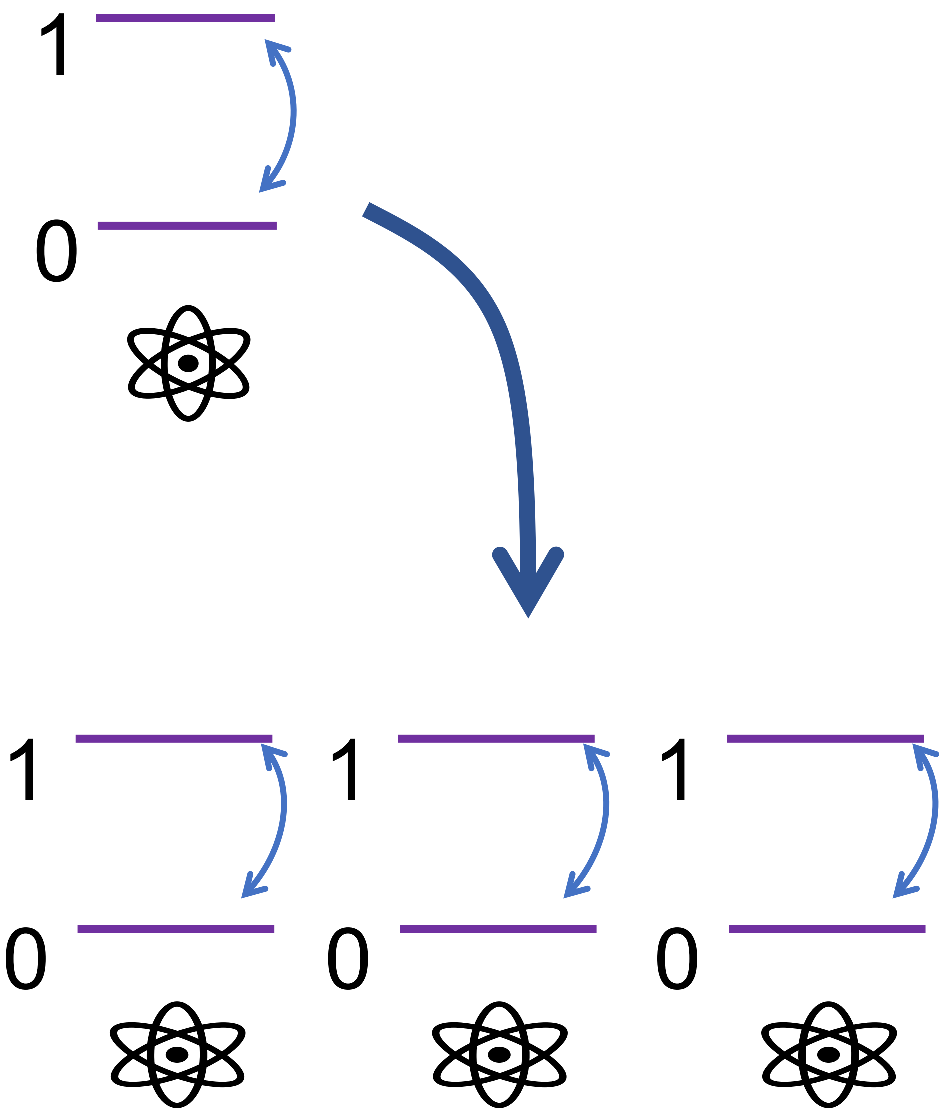
תאור הרבה קיוביטים, מכפלות טנזוריות, שזירות

TECHNION | Helen Diller Quantum Center

ד"ר דיקלה כספי

# תזכורת ומבוא

- עד כה עסקנו בקיוביט יחיד:
תאור, מדידות, הפעלת שערים.
- בשביל להנות מיתרון צריך קיוביטים
רבים ומשאב שנקרא שזירות.
- איך מתארים קיוביטים רבים?



# מקיוביט להרבה קיוביטים

קיוביט יחיד:

וקטור מנורמל עם שני רכיבים מרוכבים

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

ביט קלאסי: 0/1

מחרוזת קלאסית (הרבה ביטים):

$$000 \cdots 0$$
$$00 \cdots 01$$
$$\vdots$$
$$111 \cdots 11$$

גם בקיוביטים, נצפה שהמצבים הבאים יהיו קבילים:

$$00, 01, 10, 11$$

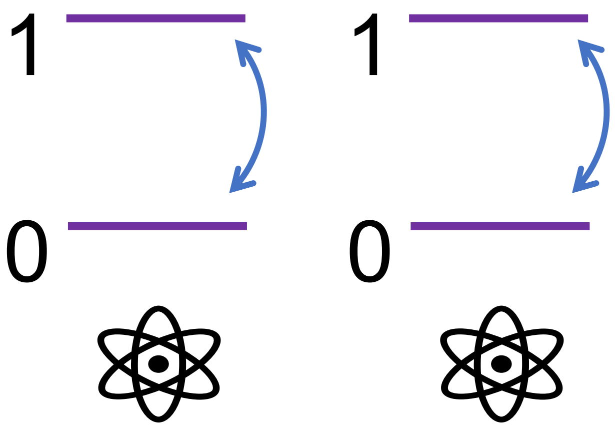
# שני קיובטים

במערכת עם שני קיובטים a ו-b,
יש לנו בסיס לכל אחד מהם

$$\{|0\rangle_a, |1\rangle_a\}, \qquad \{|0\rangle_b, |1\rangle_b\}$$

מצבים של שני קיובטים:

$$|0\rangle_a|0\rangle_b, \qquad |0\rangle_a|1\rangle_b,$$
$$|1\rangle_a|0\rangle_b, \quad |1\rangle_a|1\rangle_b$$




וגם סופרפוזיציות!

$$\alpha|0\rangle_a|0\rangle_b + \beta|0\rangle_a|1\rangle_b + \gamma|1\rangle_a|0\rangle_b + \delta|1\rangle_a|1\rangle_b$$

# מכפלות טנזוריות - וקטורים

מכפלה טנזורית של שני מרחבים וקטוריים:

מרחב ממימד $n$
מרחב ממימד $m$ $\leftarrow$ מרחב ממימד $nm$

מכפלה טנזורית של שני וקטורים:

וקטור ממימד $n$
וקטור ממימד $m$ $\leftarrow$ וקטור ממימד $nm$

סימון: $\otimes$

לדוגמה:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\gamma\\ \alpha\delta\\ \beta\gamma\\ \beta\delta\end{pmatrix}$$

# מכפלות טנזוריות - וקטורים

מכפלה טנזורית של שני מרחבים וקטוריים:

מרחב ממימד $n$

מרחב ממימד $m$

$\leftarrow$ מרחב ממימד $nm$

מכפלה טנזורית של שני וקטורים:

וקטור ממימד $n$

וקטור ממימד $m$

$\leftarrow$ וקטור ממימד $nm$

סימון: $\otimes$

לדוגמה:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle)$$

$$= \alpha\gamma|0\rangle \otimes |0\rangle + \alpha\delta|0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$+ \beta\gamma|1\rangle \otimes |0\rangle + \beta\delta|1\rangle \otimes |1\rangle$$

# סימוני מכפלה טנזורית בנוטציית דיראק

סימון מלא: $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$

אבל נראה גם:

$$|\psi\rangle|\phi\rangle$$

$$|\psi\phi\rangle$$

$$|\psi\rangle_1|\phi\rangle_2$$

דוגמאות:

שני קיוביטים

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle|0\rangle = |00\rangle$$

$$|01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle|+\rangle$$

# בחזרה לשני קיוביטים

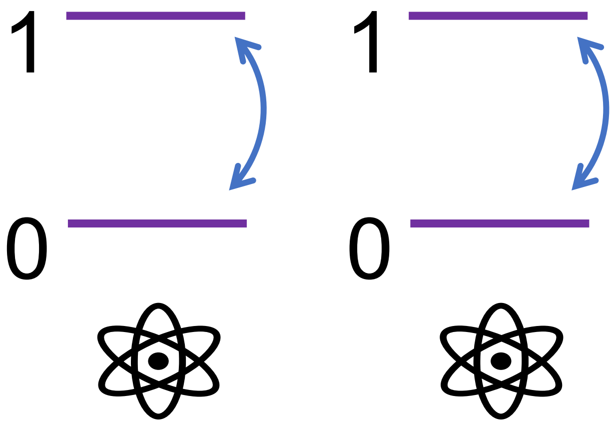
במערכת עם שני קיוביטים a ו-b,
יש לנו בסיס לכל אחד מהם

$$\{|0\rangle_a, |1\rangle_a\}, \qquad \{|0\rangle_b, |1\rangle_b\}$$

בסיס סטנדרטי של שני קיוביטים

$$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$$

מימד המרחב: 4




מצב כללי של שני קיוביטים

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$$

תוצאות אפשריות במדידה בבסיס החישובי

$$00, 01, 10, 11$$

# מכפלות טנזוריות ונוטצייה – שערים

תזכורת:

שער שפועל על קיוביט $H|\psi\rangle$

על שני קיוביטים:

$$A \otimes B|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = (A|\psi\rangle) \otimes (B|\phi\rangle)$$

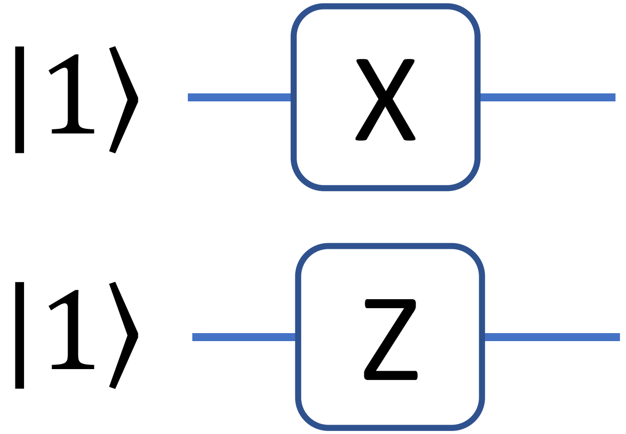
דוגמאות:

1. $X \otimes Z|0\rangle \otimes |0\rangle = (X|0\rangle) \otimes (Z|0\rangle) = |1\rangle \otimes |0\rangle$
2. $H \otimes X|00\rangle = |+\rangle|1\rangle$
3. $X \otimes I|11\rangle = |01\rangle$
4. $X|11\rangle = X \otimes I|11\rangle = |01\rangle$

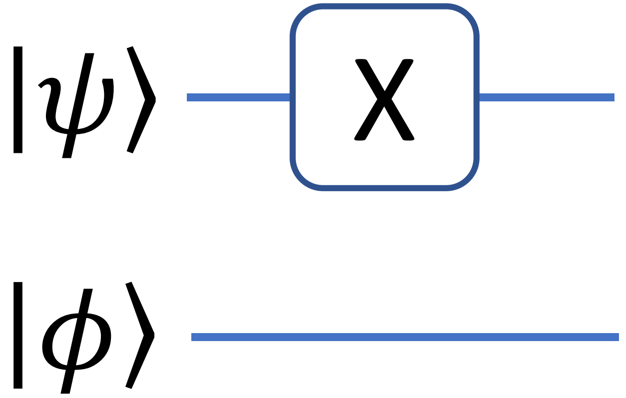
# מכפלות טנזוריות ונוטצייה – שערים

על שני קיוביטים:

$$X \otimes Z|1\rangle \otimes |1\rangle = (X|1\rangle) \otimes (Z|1\rangle)$$




$$X \otimes I|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = (X|\psi\rangle) \otimes |\phi\rangle$$



# שני קיוביטים - דוגמה

שאלה:

נתון המצב $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$

מפעילים על המצב $ZX$ ואז מודדים בבסיס החישובי.

1. מהן התוצאות האפשריות?
2. מה הסיכוי לקבל כל אחת מהן?

פתרון:

נפעיל על המצב $ZX$ (בעצם $Z \otimes X$)

$$ZX|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ZX|10\rangle + ZX|01\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|11\rangle + |00\rangle)$$

התוצאות האפשריות וההסתברויות להן

| 00 | 01 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ |

# $n$ קיוביטים

בסיס למרחב

$\{|0\cdots 0\rangle, |0\cdots 01\rangle, \dots, |1\cdots 1\rangle\}$

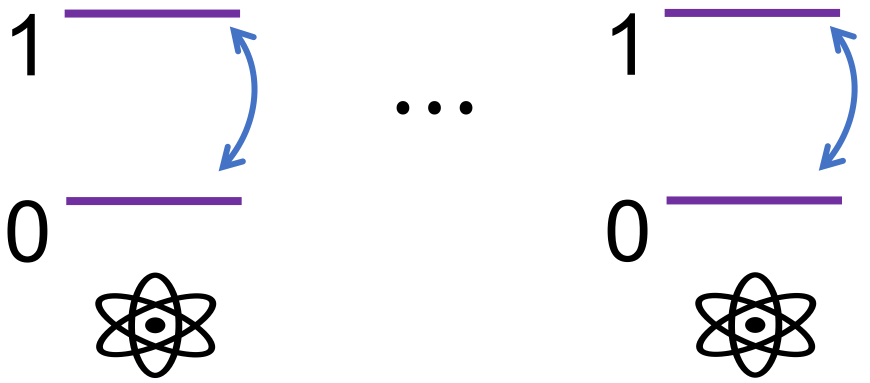
כל המחרוזות הבינאריות $0,1,\dots,2^n-1$

מימד המרחב $2^n$

מצב כללי של $n$ קיוביטים

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i|i\rangle, \qquad \alpha_i \in \mathbb{C}$$

ייצוג בינארי




נרמול $\sum_i|\alpha_i|^2 = 1$

תוצאות אפשריות במדידה בבסיס החישובי:

$0\cdots 0, 0\cdots 01, \cdots, 1\cdots 1$

הסיכוי לקבל $i$ (מחרוזת בינארית) הוא $|\alpha_i|^2$

# $n$ קיוביטים – דוגמאות

מצב לדוגמה של שלושה קיוביטים

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$$

בסיס חישובי של שלושה קיוביטים

$$\begin{Bmatrix} |000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, \\ |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle \end{Bmatrix}$$

מימד המרחב $2^3 = 8$

מצב לדוגמה של חמישה קיוביטים

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00010\rangle + i|11110\rangle)$$

בסיס חישובי של חמישה קיוביטים

$$\begin{Bmatrix} |00000\rangle, |00001\rangle, |00010\rangle, |00011\rangle, |00100\rangle, \\ |00101\rangle, |00110\rangle, |00111\rangle, |01000\rangle, |01001\rangle, \\ |01010\rangle, |01011\rangle, |01100\rangle, |01101\rangle, |01110\rangle, \\ |01111\rangle, |10000\rangle, |10001\rangle, |10010\rangle, |10011\rangle, \\ |10100\rangle, |10101\rangle, |10110\rangle, |10111\rangle, |11000\rangle, \\ |11001\rangle, |11010\rangle, |11011\rangle, |11100\rangle, |11101\rangle, \\ |11110\rangle, |11111\rangle \end{Bmatrix}$$

מימד המרחב $2^5 = 32$

# שזירות (Entanglement)

נבחין בין שני סוגי מצבים של $n$ קיוביטים:

נחלק את המערכת לשתי תתי מערכות, A ו-B.

מצבי מכפלה:

$$|\Psi\rangle_{AB} = |a\rangle_A \otimes |b\rangle_B$$

מצבים שזורים:

$$|\Psi\rangle_{AB} \neq |a\rangle_A \otimes |b\rangle_B$$

אינם מצבי מכפלה!

דוגמה: שני קיוביטים. נחלק את המערכת לקיוביט וקיוביט.

1. $|\psi_1\rangle = |00\rangle$ מכפלה
2. $|\psi_2\rangle = |01\rangle$ מכפלה
3. $|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle)$ מכפלה

$$|\psi_3\rangle = |0\rangle \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

4. $|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ שזור!

# מצבי בל (Bell States)

https://en.wikipedia.org/wiki/John_Stewart_Bell

במערכת של שני קיוביטים, ישנם ארבעה מצבים שנקדיש להם תשומת לב מיוחדת.

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

תכונות:

- כולם שזורים.

למשל, עבור $|\Psi_0\rangle$, ננסה לכתוב כמצב מכפלה

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$\Rightarrow \alpha\gamma = 1, \alpha\delta = 0, \beta\gamma = 0, \beta\delta = 1$$

אין כאלה $\alpha,\beta,\gamma,\delta$! לכן $|\Psi_0\rangle$ אינו מצב מכפלה, כלומר הוא שזור.

- הם מהווים בסיס למרחב של שני קיוביטים.

# בפרק הבא...

• שערים, שערים על הרבה קיוביטים