בית ספר הלן דילר לחישוב קוונטי – הרצאה #1
מכניקה קוונטית בסיסית

אלגברה לינארית, קיוביט, נוטציית דיראק, מדידות, אבולוציה ושערים

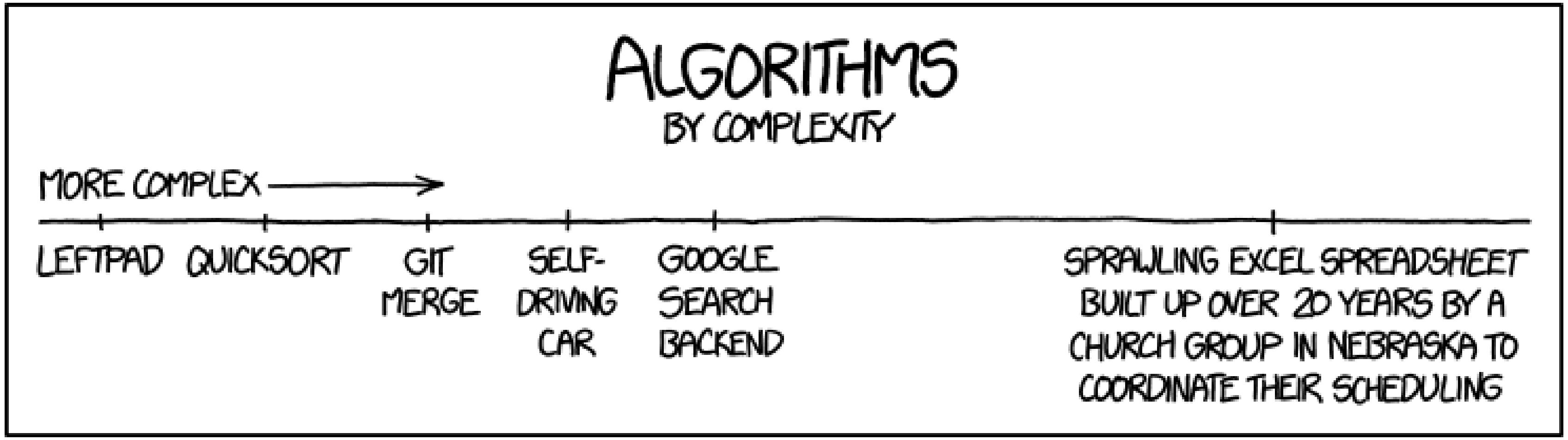
TECHNION | Helen Diller Quantum Center

ד"ר דיקלה כספי

מבוא – חישוב וקידוד מידע

- **אנחנו מתעניינים בחישובים**
  - אילו חישובים ניתן לבצע?
  - על אילו מחשבים / מערכות?
  - כמה מהר אפשר לבצע חישובים?
  - אם אני יודע לבצע חישוב מסוים, מה זה אומר לי על חישוב אחר?

- **בהקשר של מחשבים קוונטים**
  - אילו חישובים ניתן לבצע על מחשב קוונטי?
  - האם ניתן לבצע חישובים על מחשב קוונטי יותר טוב ממחשב קלאסי?
  - כמה מהר אפשר לבצע חישוב קוונטי?
  - על אילו מערכות קוונטיות ניתן לממש חישובים?



xkcd.com/1667

מבוא – חישוב וקידוד מידע

- דוגמה לחישוב: כמות המחלימים הצפויה ממחלה מסוימת

בתהליך החישוב משתמשים במידע שצריך לקודד למכונה שמבצעת את החישוב.

קידוד: ייצוג מידע

דוגמה: כתב ברייל

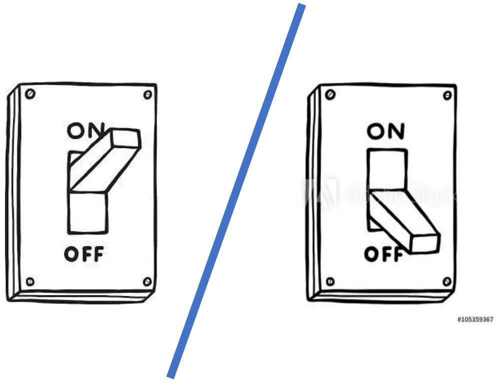
Basic	**Braille**	⠁	⠧	⠛	⠙	⠓	⠺
	Print	א '	ב *v*	ג *g*	ד *dh*	ה *h*	ו *w*
Dagesh	**Braille**		⠃				⠬
	Print		בּ *b* *bb*				וּ *û* *ww*

https://en.wikipedia.org/wiki/Hebrew_Braille

מבוא – הביט הקלאסי

- במחשב הקלאסי, ייצוג מידע מתבצע באמצעות ביטים
- ביט, או בעברית סיבית (Binary digit – Bit, סיבית – סיפרה בינארית)

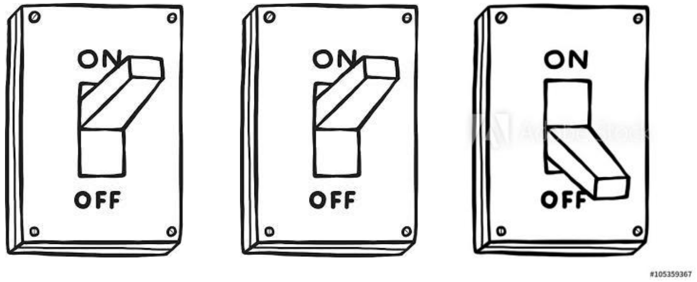
מימוש פיזי



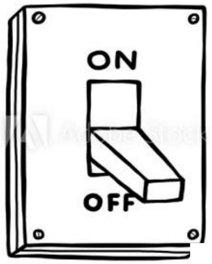
תאור לוגי

0 / 1

- אפשר לקרוא



- אפשר (וכדאי) להפעיל פעולות



אלגברה לינארית – מרחב וקטורי

- **מרחב וקטורי:** אוסף של אובייקטים (וקטורים) שיודעים להתחבר ולהיות מוכפלים במספרים.

לדוגמה, $\mathbb{C}^2$

מספרים מרוכבים

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

וקטור

דוגמאות:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2i \\ 5i \end{pmatrix}$$

$$3\begin{pmatrix} 3 \\ 5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15i \end{pmatrix}$$

אלגברה לינארית – מרחב וקטורי

- **בסיס**: קבוצת וקטורים מינימלית שבאמצעותה ניתן לייצג כל וקטור במרחב.

  מספר הוקטורים בבסיס הוא ה**מימד** של המרחב.

- לדוגמה, הבסיס הסטנדרטי

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

כל וקטור ב-$\mathbb{C}^2$ אפשר לכתוב באמצעותו

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

- פעולות על וקטורים מיוצגות על ידי **מטריצות**.
- לדוגמה

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times2+1\times3\\1\times2+0\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+0\times3\\0\times2-1\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

אלגברה לינארית – מכפלה פנימית

- **מכפלה פנימית:** פעולה במרחב וקטורי שלוקחת שני וקטורים במרחב ומייצרת סקלר (מספר).

$$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

זוג וקטורים

סקלר (מספר)

- תכונות:
  - לינאריות $\langle v,aw\rangle = a\langle v,w\rangle$
    $\langle v+s,w\rangle = \langle v,w\rangle + \langle s,w\rangle$
  - הצמדה $\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle}$
  - חיוביות $\langle v,v\rangle > 0$ עבור $v \neq 0$

צמוד מרוכב

- לדוגמה:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$
$$= 1 \times 3 + 2 \times 4 = 11$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}3\\5i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2i\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}3 & -5i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2i\\0\end{pmatrix}$$
$$= 3 \times 2i + (-5i) \times 0 = 6i$$

אלגברה ליניארית – מכפלה פנימית

- **מכפלה פנימית:** פעולה במרחב וקטורי שלוקחת שני וקטורים במרחב ומייצרת סקלר (מספר).

$$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

זוג וקטורים

סקלר (מספר)

- תכונות:
  - ליניאריות $\langle v, aw \rangle = a\langle v, w \rangle$
    $\langle v+s, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle s, w \rangle$
  - הצמדה $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
  - חיוביות $\langle v, v \rangle > 0$ עבור $v \neq 0$

צמוד מרוכב

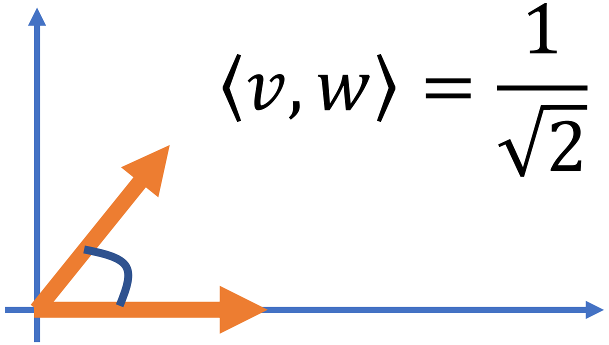
הזווית הגאומטרית:

במרחב הדו מימדי, למשל, המכפלה הפנימית קשורה לזווית בין שני וקטורים.

לדוגמה

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$$



אלגברה לינארית – מכפלה פנימית

- **מכפלה פנימית:** פעולה במרחב וקטורי שלוקחת שני וקטורים במרחב ומייצרת סקלר (מספר).

$$(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

זוג וקטורים

סקלר (מספר)

- תכונות:
  - לינאריות $\langle v,aw\rangle = a\langle v,w\rangle$

    $\langle v+s, w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle s, w\rangle$
  - הצמדה $\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle}$

    צמוד מרוכב
  - חיוביות $\langle v,v\rangle > 0$ עבור $v \neq 0$

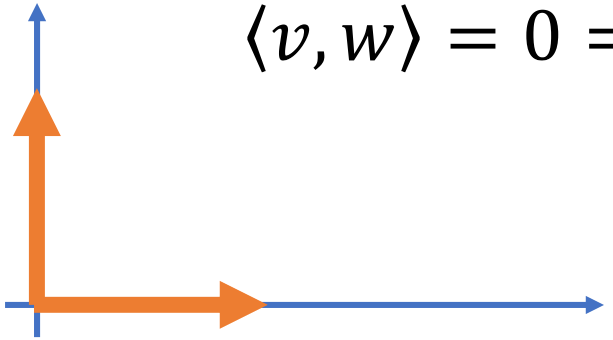
הזווית הגאומטרית:

במרחב הדו מימדי, למשל, המכפלה הפנימית קשורה לזווית בין שני וקטורים.

לדוגמה

$$v = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\langle v, w\rangle = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$$



אלגברה לינארית – אורתוגונליות, נרמול

- שני וקטורים הם **אורתוגונליים** אם המכפלה הפנימית שלהם היא אפס:
  אם $\langle v,w\rangle = 0$, v,w אורתוגונליים.
  לדוגמה, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. דוגמה נוספת: $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
- וקטור **מנורמל**: המכפלה הפנימית שלו עם עצמו היא 1
  $\langle v,v\rangle = 1$.
  לדוגמה: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ וגם $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

בסיס אורתונורמלי: בסיס שבו כל הוקטורים מנורמלים ואורתוגונליים.

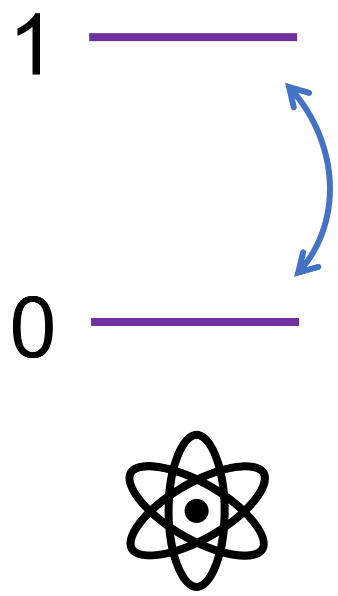
לדוגמה:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

קיוביט

- **קיוביט**: יחידה בסיסית של מידע קוונטי.
- באנגלית: Qubit – Quantum bit



תאור לוגי של קיוביט:

נשתמש בוקטור עם שני רכיבים

קשור לסיכוי למצוא את המערכת ב-0

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

קשור לסיכוי למצוא את המערכת ב-1

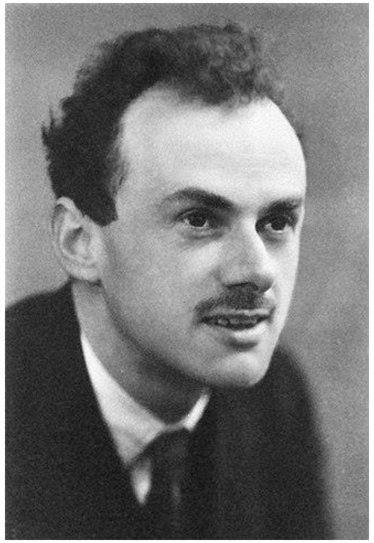
מספרים מרוכבים

$x + iy$

$i^2 = -1$

נקראים **אמפליטודות**

נוטציית דיראק



https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac

- דרך (נוחה ומקובלת!) של פיזיקאים לכתוב וקטורים ומכפלות.
- מיוחסת לפול דיראק, 1939

אובייקט	נוטצייה	שם
וקטור עמודה	$\|\psi\rangle$	Ket
וקטור שורה	$\langle\psi\|$	Bra
מכפלה פנימית	$\langle\psi\|\phi\rangle$	Braket
מטריצה	$\|\psi\rangle\langle\phi\|$	

לדוגמה

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \leftrightarrow |0\rangle, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow |1\rangle$$

ואז מצב הקיוביט

$$\psi = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

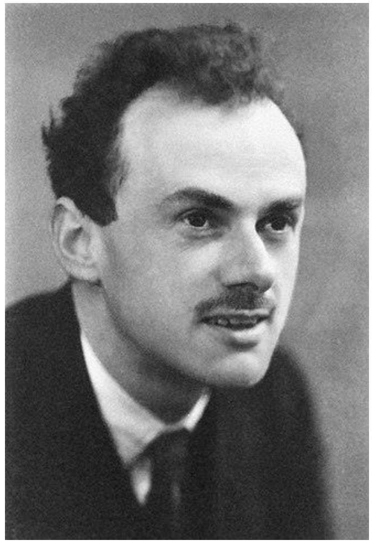
בנוטציית דיראק

$$|\boldsymbol{\psi}\rangle = \boldsymbol{\alpha}|\mathbf{0}\rangle + \boldsymbol{\beta}|\mathbf{1}\rangle$$

TECHNION | Helen Diller Quantum Center

נוטציית דיראק

- דרך (נוחה ומקובלת!) של פיזיקאים לכתוב וקטורים ומכפלות.
- מיוחסת לפול דיראק, 1939



https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac

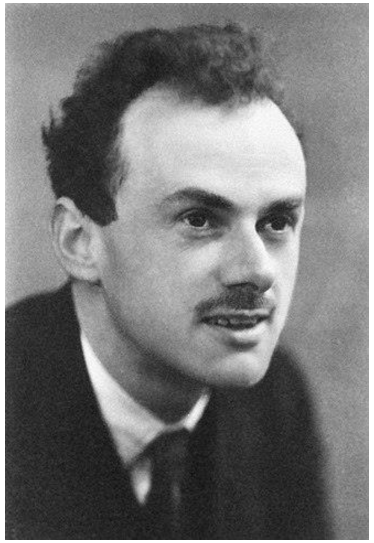
אובייקט	נוטציה	שם
וקטור עמודה	$\vert\psi\rangle$	Ket
וקטור שורה	$\langle\psi\vert$	Bra
מכפלה פנימית	$\langle\psi\vert\phi\rangle$	Braket
מטריצה	$\vert\psi\rangle\langle\phi\vert$	

לדוגמה

$$\langle 0|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

נוטציית דיראק

- דרך (נוחה ומקובלת!) של פיזיקאים לכתוב וקטורים ומכפלות.
- מיוחסת לפול דיראק, 1939



https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac

אובייקט	נוטציה	שם
וקטור עמודה	$\|\psi\rangle$	Ket
וקטור שורה	$\langle\psi\|$	Bra
מכפלה פנימית	$\langle\psi\|\phi\rangle$	Braket
מטריצה	$\|\psi\rangle\langle\phi\|$	

לדוגמה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

וכפל מטריצה בוקטור עמודה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)|0\rangle$$
$$= \langle 0|0\rangle|0\rangle - \langle 1|0\rangle|1\rangle = |0\rangle$$

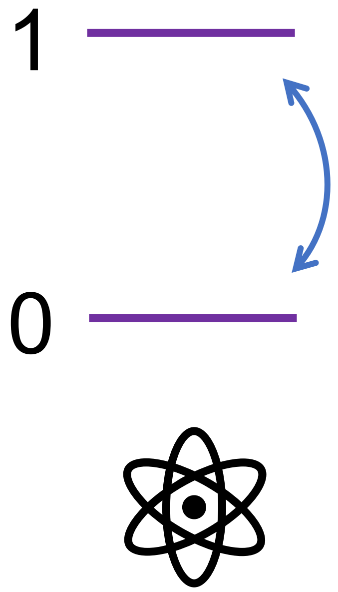
בחזרה לקיוביט

- מערכת שתי רמות שממומשת במערכת קוונטית (לדוגמה, אלקטרון באטום).
- מצב הקיוביט:

סופרפוזיציה

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

מספרים מרוכבים שנקראים אמפליטודות



כל רכיב קשור לסיכוי למצוא את המערכת באחד מהמצבים:

הסיכוי למצוא ב-0 הוא $|\alpha|^2$

הסיכוי למצוא ב-1 הוא $|\beta|^2$

דוגמאות:

1. $|0\rangle$
2. $|1\rangle$

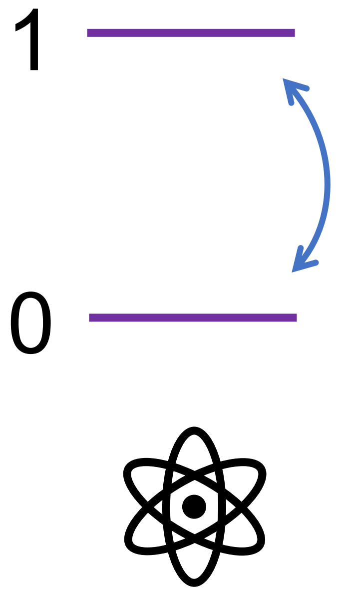
בחזרה לקיוביט

- מערכת שתי רמות שממומשת במערכת קוונטית (לדוגמה, אלקטרון באטום).
- מצב הקיוביט:

סופרפוזיציה

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

מספרים מרוכבים שנקראים אמפליטודות



כל רכיב קשור לסיכוי למצוא את המערכת באחד מהמצבים:

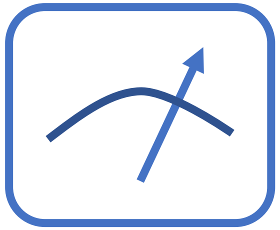
הסיכוי למצוא ב-0 הוא $|\alpha|^2$

הסיכוי למצוא ב-1 הוא $|\beta|^2$

דוגמאות:

3. $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle$
4. $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle$

מדידות



מדידה במכניקה קוונטית:

התאוריה חוזה את ההסתברות לקבלת תוצאות שונות.

נתון קיוביט במצב $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

מדידת קיוביט בבסיס החישובי:

הסיכוי לקבל "0" הוא $|\langle 0|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2$

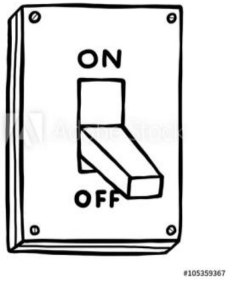
הסיכוי לקבל "1" הוא $|\langle 1|\psi\rangle|^2 = |\beta|^2$

ביחד: בטוח נקבל אחת מהתשובות (נרמול)

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

דוגמאות:

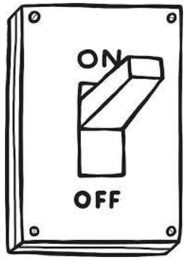
1. $|\psi\rangle = |0\rangle$



הסיכוי לקבל "0" הוא 1

הסיכוי לקבל "1" הוא 0

2. $|\psi\rangle = |1\rangle$



הסיכוי לקבל "0" הוא 0

הסיכוי לקבל "1" הוא 1

מדידות

מדידה במכניקה קוונטית:

התאוריה חוזה את ההסתברות לקבלת תוצאות שונות.

נתון קיוביט במצב $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

מדידת קיוביט בבסיס החישובי:

הסיכוי לקבל "0" הוא $|\langle 0|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2$

הסיכוי לקבל "1" הוא $|\langle 1|\psi\rangle|^2 = |\beta|^2$

ביחד: בטוח נקבל אחת מהתשובות (נרמול)

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

דוגמאות:

3. $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

הסיכוי לקבל "0" הוא $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

הסיכוי לקבל "1" הוא $\frac{1}{2}$

4. $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

הסיכוי לקבל "0" הוא $\frac{1}{2}$

הסיכוי לקבל "1" הוא $\frac{1}{2}$

https://en.wikipedia.org/wiki/Erwin_Schr%C3%B6dinger

אבולוציה של מערכת קוונטית, שערים

מערכת קוונטית מתפתחת בזמן לפי משוואת שרדינגר, לכן המעבר ממצב בזמן t_1 למצב בזמן t_2 מתואר על ידי **פעולה אוניטרית U**

$$|\psi(t_1)\rangle \xrightarrow{U} |\psi(t_2)\rangle$$

פעולה אוניטרית:

- שומרת על כך שסכום ההסתברויות הוא 1 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$
- עמודות המטריצה הן בסיס אורתונורמלי

דוגמאות לפעולות אוניטריות על קיוביט:

1. Z

מטריצה $Z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

נוטציית דיראק $Z=|0\rangle\langle 0|-|1\rangle\langle 1|$

פעולה על קיוביט

$$Z|\psi\rangle = (|0\rangle\langle 0|-|1\rangle\langle 1|)(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle) = \alpha\langle 0|0\rangle|0\rangle+\beta\langle 0|1\rangle|0\rangle-\alpha\langle 1|0\rangle|1\rangle - \beta\langle 1|1\rangle|1\rangle = \alpha|0\rangle-\beta|1\rangle$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Erwin_Schr%C3%B6dinger

אבולוציה של מערכת קוונטית, שערים

מערכת קוונטית מתפתחת בזמן לפי משוואת שרדינגר, לכן המעבר ממצב בזמן t_1 למצב בזמן t_2 מתואר על ידי **פעולה אוניטרית $\boldsymbol{U}$**

$$|\psi(t_1)\rangle \xrightarrow{U} |\psi(t_2)\rangle$$

פעולה אוניטרית:

- שומרת על כך שסכום ההסתברויות הוא 1 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$
- עמודות המטריצה הן בסיס אורתונורמלי

דוגמאות לפעולות אוניטריות על קיוביט:

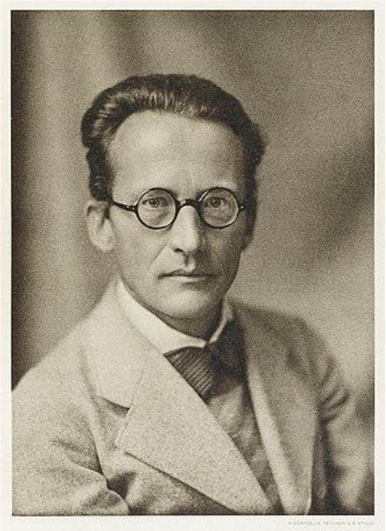
2. X , נקרא NOT

מטריצה $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

נוטציית דיראק $\mathrm{X} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$

פעולה על קיוביט

$$X|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Erwin_Schr%C3%B6dinger

אבולוציה של מערכת קוונטית, שערים

מערכת קוונטית מתפתחת בזמן לפי משוואת שרדינגר, לכן המעבר ממצב בזמן t_1 למצב בזמן t_2 מתואר על ידי **פעולה אוניטרית U**

$$|\psi(t_1)\rangle \xrightarrow{U} |\psi(t_2)\rangle$$

פעולה אוניטרית:

- שומרת על כך שסכום ההסתברויות הוא 1 $\quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$
- עמודות המטריצה הן בסיס אורתונורמלי

דוגמאות לפעולות אוניטריות על קיוביט:

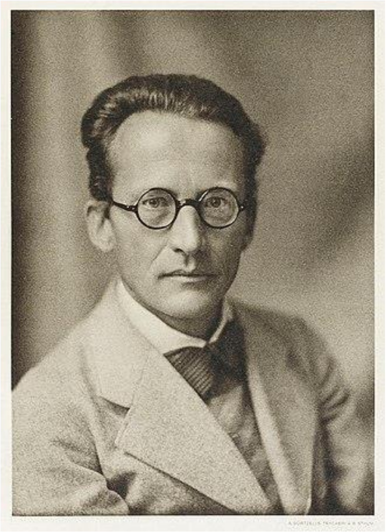
3. Y

מטריצה $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

נוטציית דיראק $X = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|$

פעולה על קיוביט

$$Y|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Erwin_Schr%C3%B6dinger

אבולוציה של מערכת קוונטית, שערים

מערכת קוונטית מתפתחת בזמן לפי משוואת שרדינגר, לכן המעבר ממצב בזמן t_1 למצב בזמן t_2 מתואר על ידי **פעולה אוניטרית $\boldsymbol{U}$**

$$|\psi(t_1)\rangle \xrightarrow{U} |\psi(t_2)\rangle$$

פעולה אוניטרית:

- שומרת על כך שסכום ההסתברויות הוא 1 $\quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$
- עמודות המטריצה הן בסיס אורתונורמלי

דוגמאות לפעולות אוניטריות על קיוביט:

4. H, נקרא הדמר (Hadamard)

מטריצה $\mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

פעולה על קיוביט

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |+\rangle$$

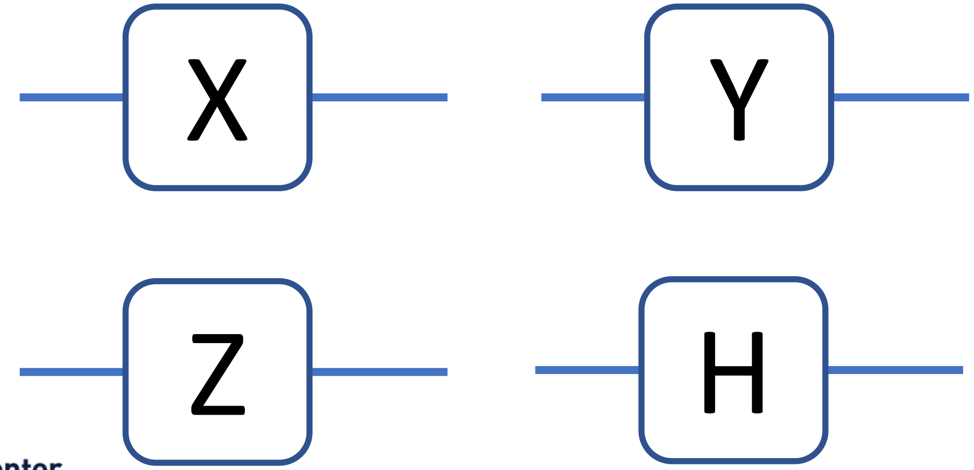
$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = |-\rangle$$

אבולוציה של מערכת קוונטית, שערים

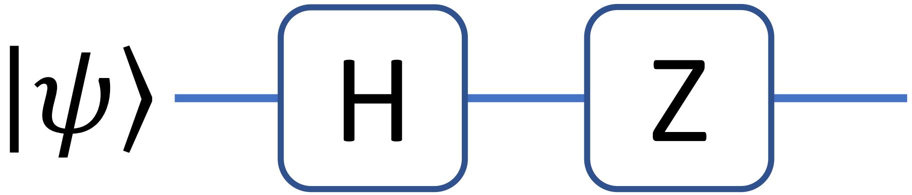
פעולות שמותר להפעיל על קיוביט הן אוניטריות.

פעולות כאלה נקראות **שערים**.

סימון מקובל:



מהשערים ניתן להרכיב מעגלים קוונטים, שהם סדרה של פעולות אוניטריות



בפרק הבא...

- הרבה קיוביטים