בית ספר הלן דילר לחישוב קוונטי – הרצאה #3
שערים

שערים על קיובט יחיד, כדור בלוך, סיבובים, שערים על שני קיוביטים, מעגלים

TECHNION | Helen Diller Quantum Center

ד"ר דיקלה כספי

תזכורת

ראינו שניתן להפעיל על מערכות קוונטיות פעולות **אוניטריות** U.

אלה הן פעולות המיוצגות על ידי מטריצות שעמודותיהן הן בסיס אורתונורמלי למרחב.

כמו כן, הן משמרות את סכום ההסתברויות כשהן פועלות על וקטור
$$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$$

נקראות **שערים קוונטים**.

https://en.wikipedia.org/wiki/Wolfgang_Pauli

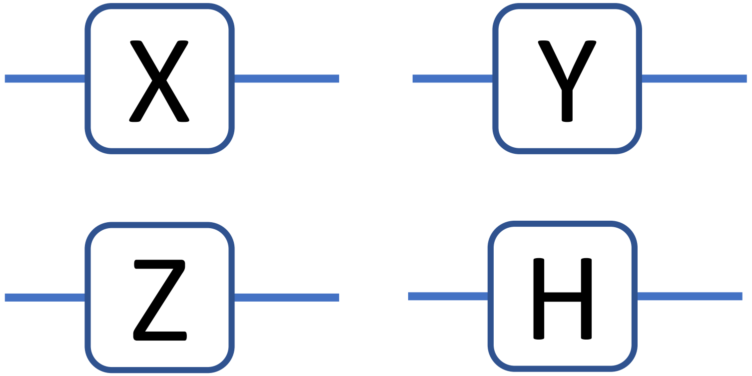
ראינו דוגמאות:

מטריצות פאולי

$$X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, Z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

שער הדמר

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$



כדור בלוך (Bloch Sphere)

תאור של קיוביט:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

כאשר α,β מספרים מרוכבים,
הוקטור מנורמל

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

ראינו שההסתברויות לתוצאות מדידה בבסיס החישובי:

סיכוי לקבל "0" הוא $|\alpha|^2$

סיכוי לקבל "1" הוא $|\beta|^2$

התחלנו עם שתי אמפליטודות מרוכבות
$\alpha = u + iv, \beta = q + ir$

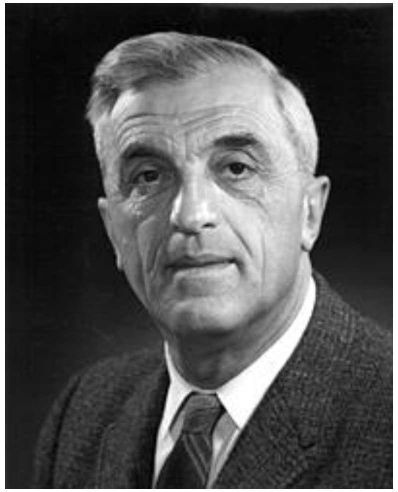
4 מספרים ממשיים

נרמול $u^2 + v^2 + q^2 + r^2 = 1$

4 מספרים ממשיים שסכום ריבועיהם 1

הסיכויים של המדידות בבסיס החישובי אינם מושפעים מכפל של כל המצב ב-$e^{i\varphi}$ (וזה נכון גם לכל המדידות), לכן אפשר לבחור את β ממשי

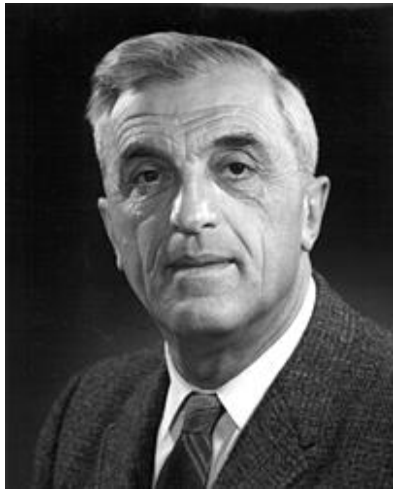
3 מספרים ממשיים שסכום ריבועיהם 1



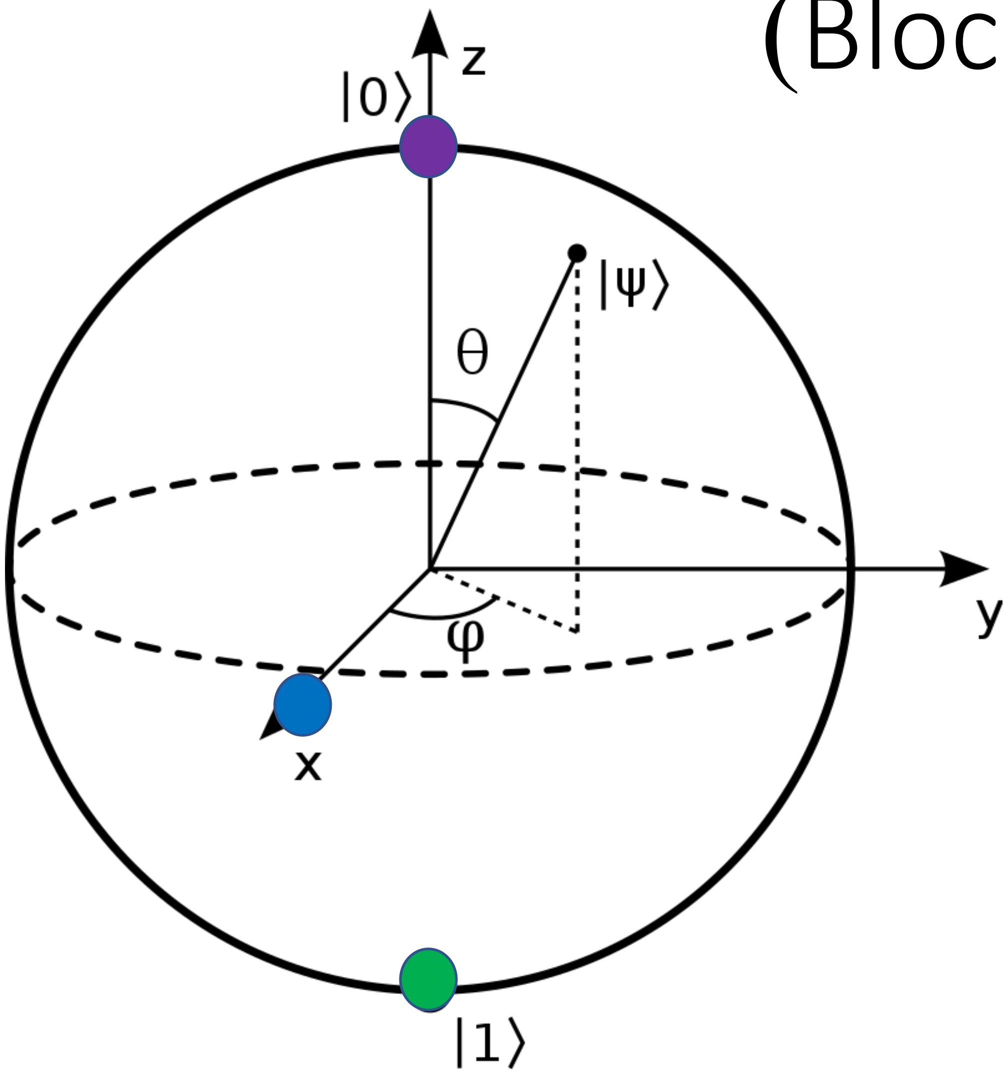
https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Bloch

פאזה גלובלית

(Bloch Sphere) כדור בלוך



https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Bloch



תאור קיוביט

$$u^2 + v^2 + q^2 = 1$$

זו נקודה על שפת כדור היחידה התלת מימדי!

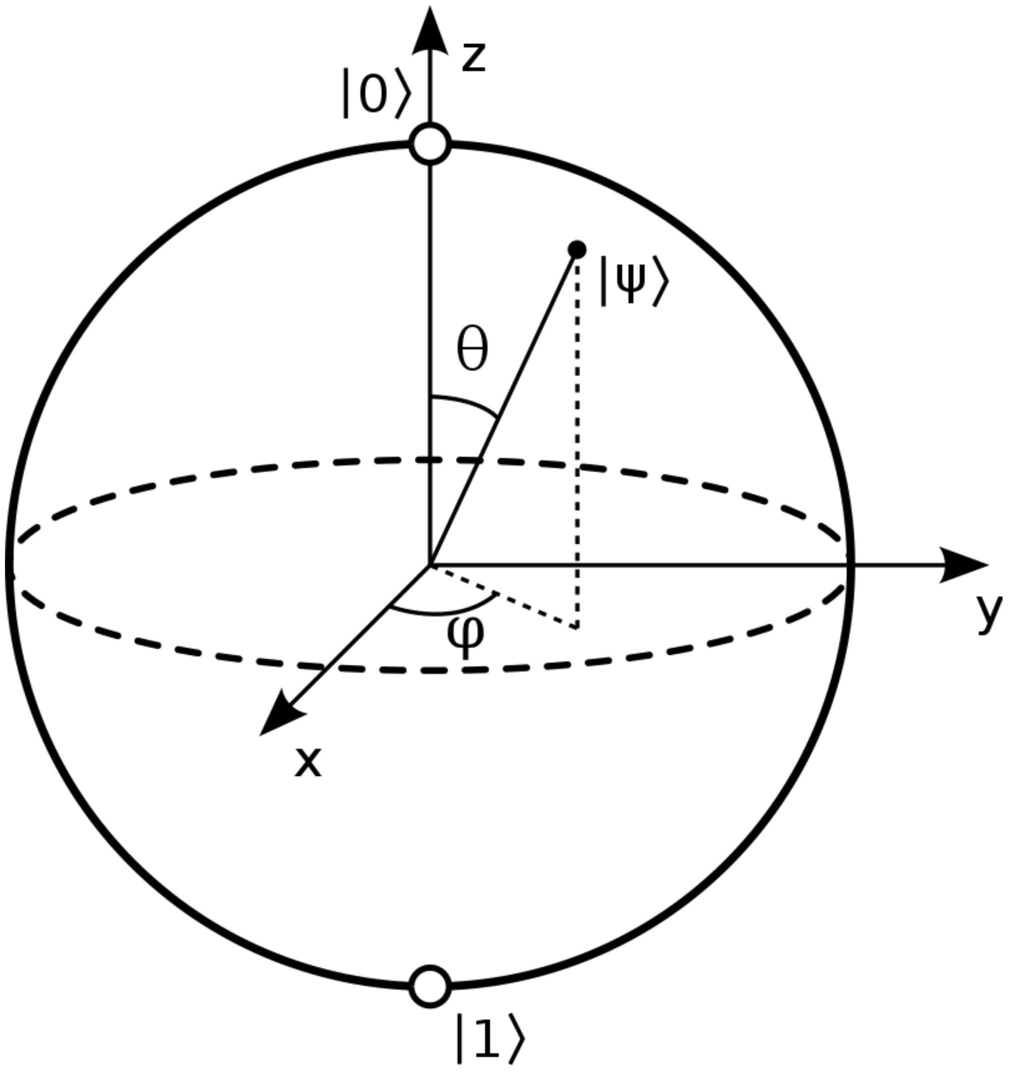
לדוגמה:

$$|0\rangle$$

$$|1\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

כדור בלוך - שערים



מה עושים שערים למצבים (נקודות על השפה) על כדור בלוך?

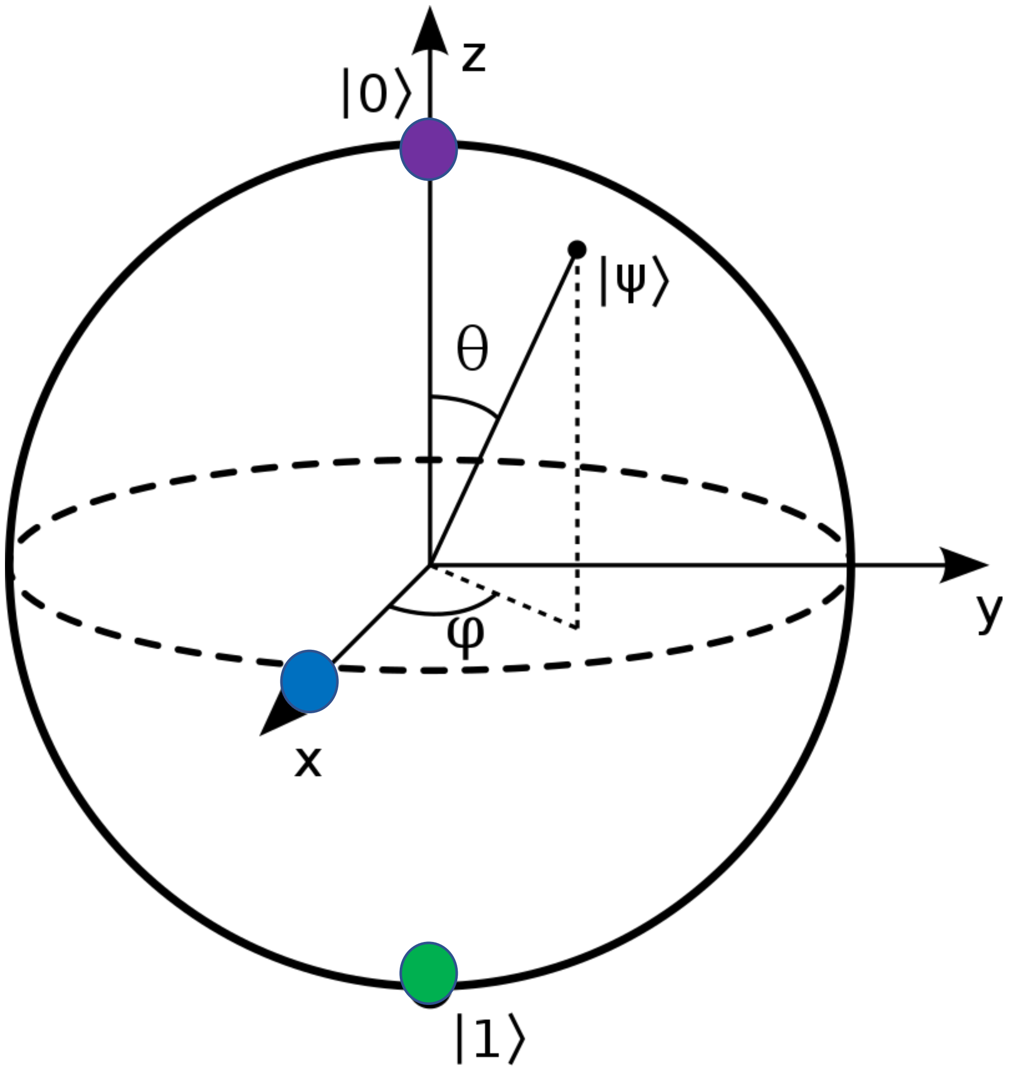
דוגמאות:

$$X|0\rangle = |1\rangle, X|1\rangle = |0\rangle, X|+\rangle = |+\rangle$$

$$Z|0\rangle = |0\rangle, Z|1\rangle = -|1\rangle, Z|+\rangle = |-\rangle$$

$$H|0\rangle = |+\rangle, H|1\rangle = |-\rangle, H|+\rangle = |0\rangle$$

סיבובים של קיוביט



עוד דרך לכתוב קיוביט:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$$0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \phi < 2\pi$$

נבדוק כמה דוגמאות:

$$|0\rangle \to \theta = 0$$

$$|1\rangle \to \theta = \pi, \phi = 0$$

$$|+\rangle \to \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0$$

סיבובים של קיוביט

נכיר שערים חדשים על קיוביט:

שערי סיבוב בזווית s

$$R_X(s) = \exp i\frac{s}{2}X$$

$$R_Y(s) = \exp i\frac{s}{2}Y$$

$$R_Z(s) = \exp i\frac{s}{2}Z$$

מהו האקספוננט של מטריצת פאולי?

$$R_X(s) = \cos\frac{s}{2}I + i\sin\frac{s}{2}X$$

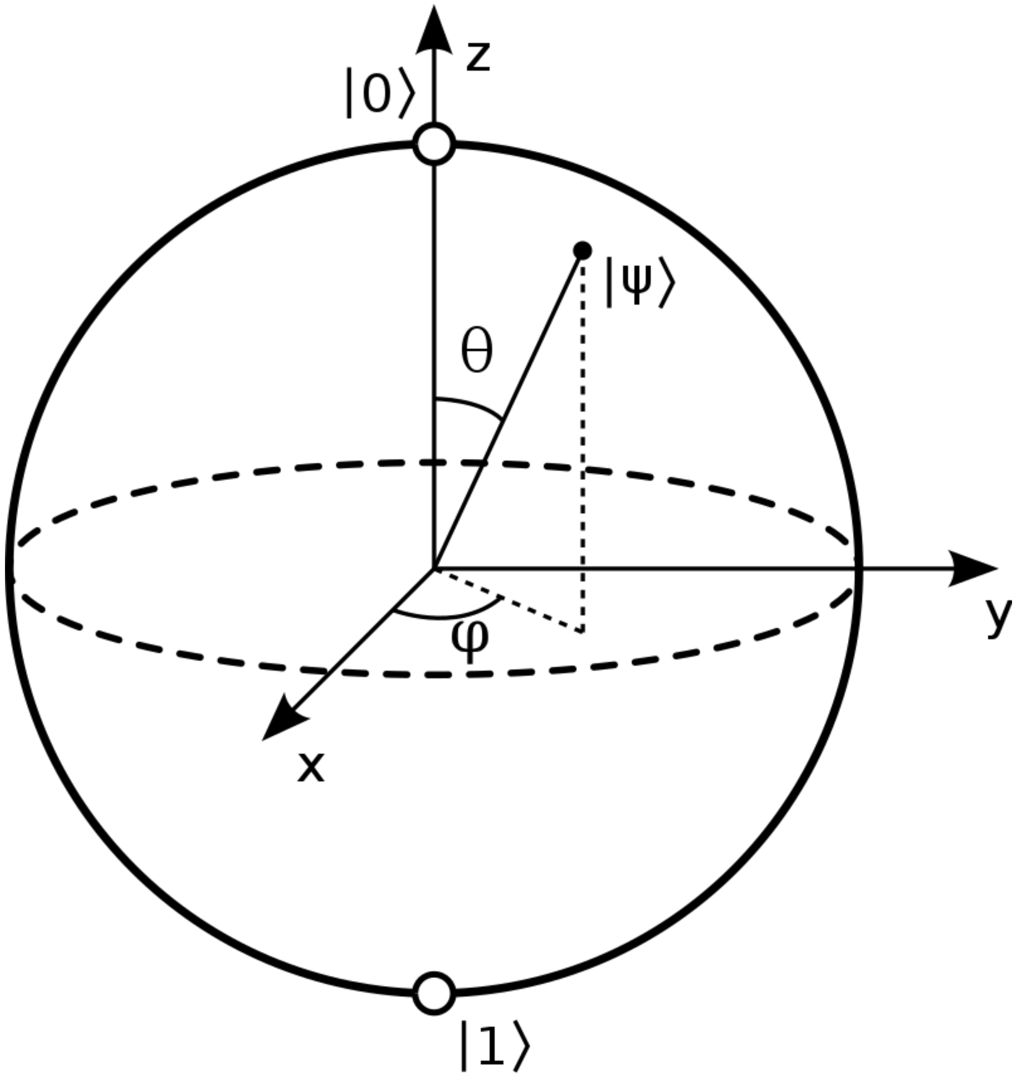
$$R_Y(s) = \cos\frac{s}{2}I + i\sin\frac{s}{2}Y$$

$$R_Z(s) = \cos\frac{s}{2}I + i\sin\frac{s}{2}Z$$

ואלה הן מטריצות אוניטריות!

כמו כן, אפשר לכתוב כל פעולה אוניטרית על קיוביט באמצעותן.

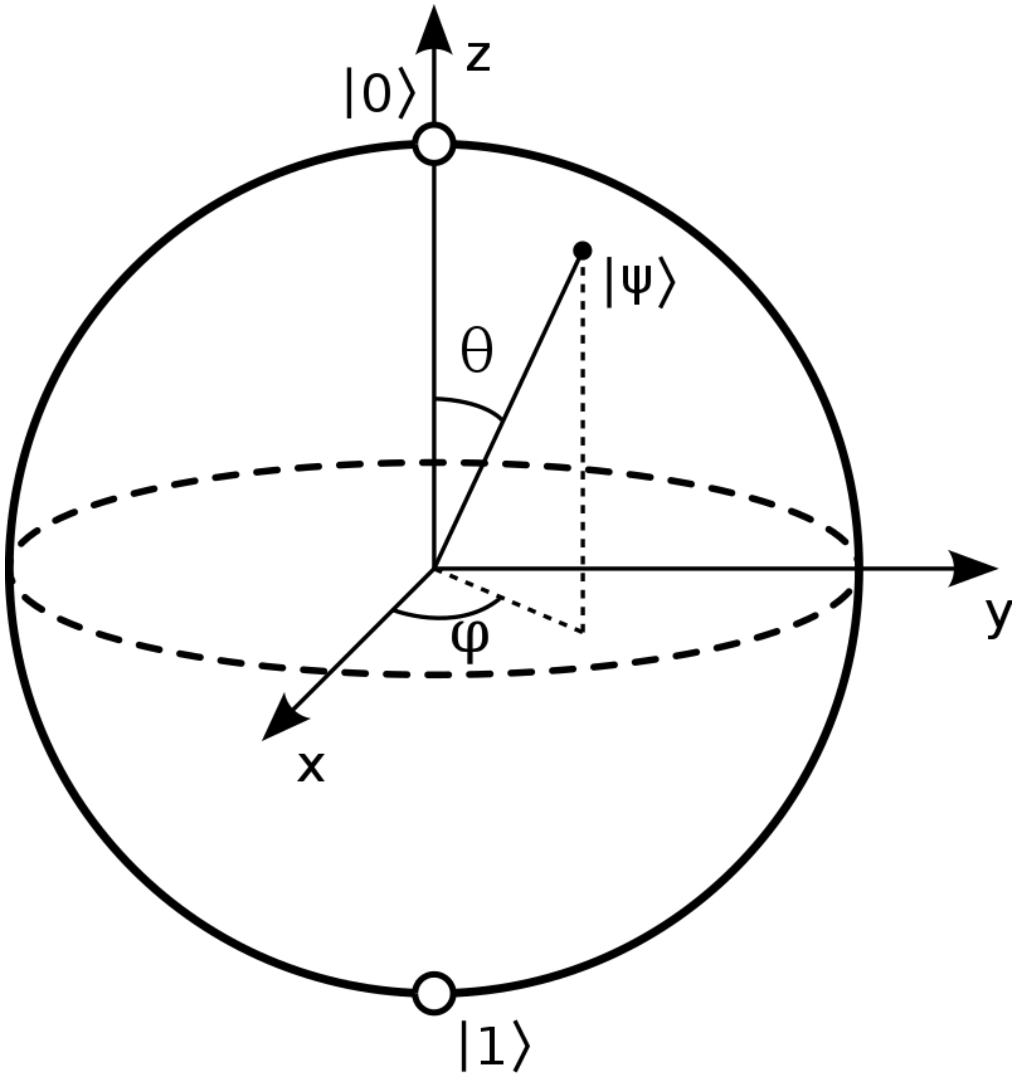
סיבובים - דוגמאות



$$R_Z(\pi)|+\rangle = \left(\cos\frac{\pi}{2} I + i\sin\frac{\pi}{2} Z\right)|+\rangle = iZ|+\rangle = i|-\rangle = |-\rangle$$

$$R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right)|1\rangle = \left(\cos\frac{\pi}{4} I + i\sin\frac{\pi}{4} X\right)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(I+iZ)|1\rangle = \frac{1-i}{\sqrt{2}}|1\rangle = |1\rangle$$

סיבובים - דוגמאות

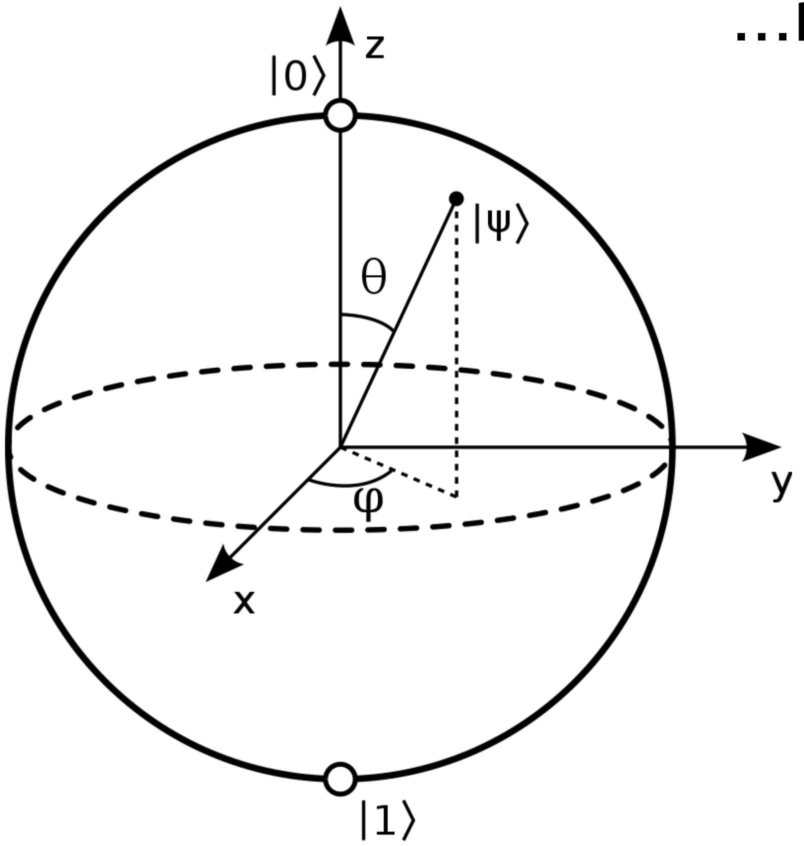


$$R_X(\pi)|0\rangle = \left(\cos\frac{\pi}{2}I + i\sin\frac{\pi}{2}X\right)|0\rangle$$
$$= iX|0\rangle = i|1\rangle = |1\rangle$$

$$R_X\left(\frac{\pi}{2}\right)|0\rangle = \left(\cos\frac{\pi}{4}I + i\sin\frac{\pi}{4}X\right)|0\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(I + iX)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$$

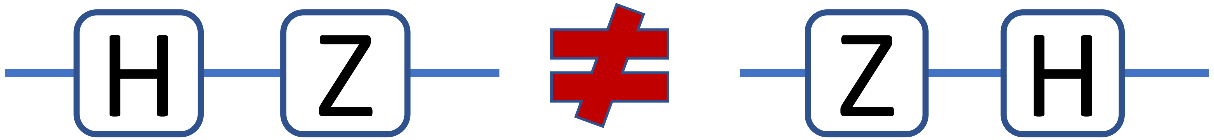
משחקים עם שערים – סדר של שערים

סדר של שערים משנה! הם לא (בהכרח) קומוטטיביים...



לדוגמה

$$HZ|1\rangle = -H|1\rangle = -|-\rangle$$
$$ZH|1\rangle = Z|-\rangle = |+\rangle$$



שערים של שני קיוביטים

נכיר מספר שערים של שני קיוביטים (עוד עליהם בהמשך!).

1. שער CNOT: שער NOT (X) מבוקר

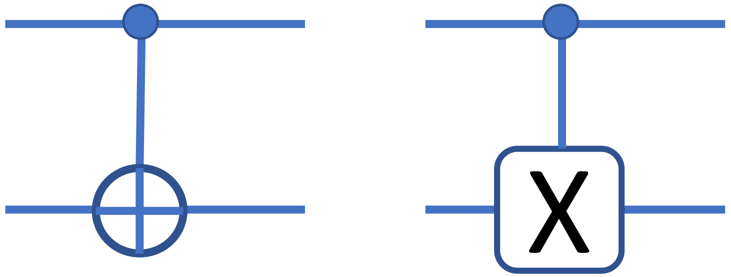
$$|00\rangle \mapsto |00\rangle$$
$$|01\rangle \mapsto |01\rangle$$
$$|10\rangle \mapsto |11\rangle$$
$$|11\rangle \mapsto |10\rangle$$

או בקיצור

$$|i\rangle|j\rangle \mapsto |i\rangle|i \oplus j\rangle \quad i,j \in \{0,1\}$$

XOR

סימון גרפי:



דוגמאות:

$$CNOT|01\rangle = |01\rangle$$

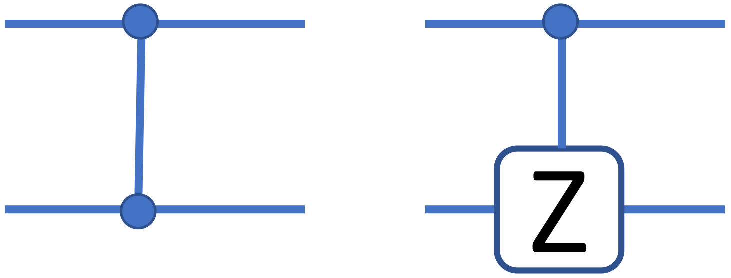
$$CNOT\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$
$$= |+\rangle|0\rangle$$

$$CNOT|+\rangle|0\rangle$$
$$= CNOT\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

שערים של שני קיוביטים

נכיר מספר שערים של שני קיוביטים (עוד עליהם בהמשך!).

סימון גרפי:



2. שער CZ: שער Z מבוקר

$$|00\rangle \mapsto |00\rangle$$
$$|01\rangle \mapsto |01\rangle$$
$$|10\rangle \mapsto |10\rangle$$
$$|11\rangle \mapsto -|11\rangle$$

דוגמאות:

$$CZ|01\rangle = |01\rangle$$

$$CZ\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$CZ|+\rangle|1\rangle = CZ\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle)$$
$$= |-\rangle|1\rangle$$

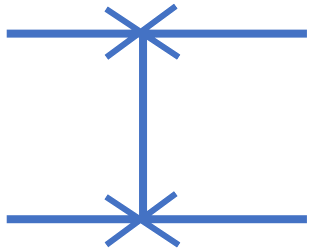
שערים של שני קיוביטים

נכיר מספר שערים של שני קיוביטים (עוד עליהם בהמשך!).

3. שער SWAP: מחליף בבסיס החישובי

$$|00\rangle \mapsto |00\rangle$$
$$|01\rangle \mapsto |10\rangle$$
$$|10\rangle \mapsto |01\rangle$$
$$|11\rangle \mapsto |11\rangle$$

סימון גרפי:



דוגמאות:

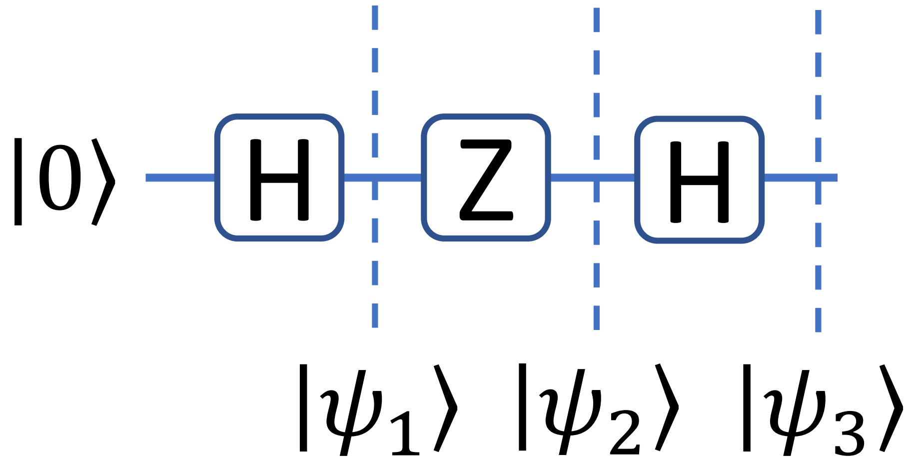
$$SWAP|01\rangle = |10\rangle$$

$$SWAP\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$$

$$SWAP|+\rangle|1\rangle$$
$$= SWAP\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle)$$
$$= |1\rangle|+\rangle$$

מעגלים

עכשיו נשחק עם מעגלים יותר מורכבים.



$$|\psi_1\rangle = H|0\rangle = |+\rangle$$
$$|\psi_2\rangle = Z|\psi_1\rangle = ZH|0\rangle = Z|+\rangle = |-\rangle$$
$$|\psi_3\rangle = H|\psi_2\rangle = HZH|0\rangle = H|-\rangle = |1\rangle$$

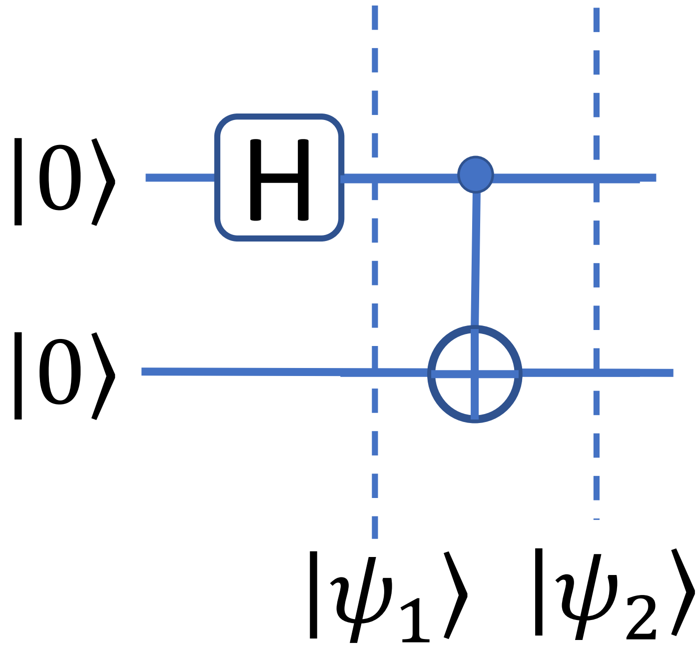
ונוכיח גם זהות

$$HZH = X$$

$$HZH = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$= X$$

מעגלים

עכשיו נשחק עם מעגלים יותר מורכבים.



$$|\psi_1\rangle = H|00\rangle = H \otimes I|00\rangle = |+\rangle|0\rangle$$
$$|\psi_2\rangle = CNOT|\psi_1\rangle = CNOT|+0\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

התחלנו ממצב מכפלה $|00\rangle$ וסיימנו במצב שזור, מצב בל $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$